교육학석사학위논문

대칭성을 이용한 사각형 학습지도 방안 연구

2018년 2월

서울대학교 대학원

수학교육과

하 예 진

대칭성을 이용한 사각형 학습지도 방안 연구

지도교수 최 영 기

이 논문을 교육학석사학위논문으로 제출함

2017년 11월

서울대학교 대학원

수학교육과

하 예 진

하예진의 석사학위논문을 인준함

2018년 1월

위 원 장 ___권 오 남___ (인)

부 위 원 장 ___유 연 주___ (인)

위 원 ___최 영 기___ (인)

국문초록

대칭성을 이용한 사각형 학습지도 방안 연구

기하 영역에서 명제가 참인지를 확인하라는 질문이 주어졌을 때, 대부분 유클리드의 연역적 증명 방법을 먼저 떠올리곤 한다. 이것은 학생들이 기하 영역에 어려움을 느끼는 이유 중 하나이다. 기하는 다른 수학 영역에 비해 활동적인 소재로 활용될 수 있음에도 불구하고, 우리나라 중학교 기하교육과정은 수학적 기호와 형식적인 증명으로 구성되어 있다. 또한 그 명제가 어디로부터 왔는지에 대한 설명과 학생 스스로 탐구하는 기회가 부족하다. 본 연구는 이에 문제의식을 느끼고 기존 기하교육과정에 변환 기하학적 관점으로 새로운 접근을 시도하였다.

변환기하는 미국 기하교육과정에서 필수 학습 영역이다. 특정 변환에 대해 보존되는 도형의 성질을 강조하고 이를 적용할 수 있는 다양한 수학적 상황을 제공한다. 이에 비해 우리나라 교육과정에서는 유클리드 기하의 추론방식을 기반으로 하고 있어 상대적으로 직관기하는 학습의 보조적 수단으로 간주되고 있다.

본 연구는 중학교 기하교육과정에 변환 기하학적 관점을 도입한 한 예시로 대칭성을 이용한 사각형 학습지도 방안을 연구하고 이를 직접 교수실험하였다. 학생들은 사각형 접기, 돌리기 등의 조작 활동을 통해 변환과 대칭에 대해 학습하며 자연스럽게 사각형의 성질을 연역할 수 있었다. 또한 대칭성을 통해 여러 가지 사각형의 관계를 통일된 관점으로 학

습할 수 있었다.

기하학습의 직관적이고 구체적인 측면을 강조하고 조작활동을 통해 도형의 성질을 직접 연역할 수 있는 방법으로서 변환기하는 그 활용가치가 높다. 변환과 대칭은 직관기하의 장점을 부각하며 기존의 기하교육과정을 새로운 시각으로 접근하게 한다.

주요어: 대칭성, 대칭변환, 변환기하, 사각형의 성질

학 번: 2016-21572

목 차

Ⅰ. 서론 ········· 1
1. 연구의 목적 및 필요성 ········· 1
2. 연구문제 ········· 3

Ⅱ. 변환기하와 기하교육 ········· 5
1. 변환기하와 대칭 ········· 5
1.1. 수학에서의 대칭 ········· 5
1.2. 기하에서의 대칭 ········· 6
2. 기하교육에서 변환기하의 역할 ········· 10
2.1. 미국 교육과정에서 변환기하 ········· 10
2.2. 우리나라 교육과정에서 변환기하 ········· 17
2.3. 우리나라와 미국의 변환기하 교육과정 비교 ········· 20
2.4. 변환기하 교육의 필요성 ········· 23

Ⅲ. 사각형 학습에 대한 선행 연구와 고찰 ········· 26
1. 사각형 학습에 대한 선행 연구 ········· 26
2. 현행 사각형 학습에 대한 고찰 ········· 31

Ⅳ. 연구 방법 및 결과 ········· 43
1. 연구 설계 ········· 43
1.1. 연구 내용 ········· 43
1.2. 연구 대상 및 방법 ········· 46

2. 자료 수집 및 분석 ···················· 48
2.1. 사각형의 대칭성 발견 ···················· 48
2.2. 대칭성을 이용한 사각형의 성질 연역 ···················· 50
2.3. 사각형의 성질들의 관계 이해 ···················· 54
2.4. 사각형의 포함관계 추론 ···················· 55
3. 연구 결과 ···················· 58

Ⅴ. 요약 및 결론 ···················· 61

참고문헌 ···················· 65

<부록> ···················· 69

Abstract ···················· 77

표 목 차

<표 Ⅱ.1> 여러 가지 사각형의 대칭의 중심과 대칭축 ······························ 7
<표 Ⅱ.2> NCTM(2000)의 학습 단계별 기대 목표 ································ 11
<표 Ⅱ.3> 2009 개정 교육과정의 내용 성취기준 ······································ 18
<표 Ⅱ.4> 미국과 우리나라의 변환기하 교육과정 비교 ···························· 21
<표 Ⅲ.1> 각의 크기와 특징에 따른 사각형의 분류 ································ 26
<표 Ⅲ.2> 변의 길이와 특징에 따른 사각형의 분류 ································ 26
<표 Ⅲ.3> 대각선의 길이와 특징에 따른 사각형의 분류 ························ 27
<표 Ⅲ.4> 대각선으로 분할된 삼각형의 특징에 따른 사각형의 분류 ···· 27
<표 Ⅲ.5> 대칭성에 따른 사각형의 분류 ·· 27
<표 Ⅲ.6> 교과서에서 사각형의 정의로부터 성질을 연역하는 과정 ····· 35
<표 Ⅲ.7> 사각형의 대칭성으로부터 성질을 연역하는 과정 ···················· 38
<표 Ⅲ.8> 현행 교과서와 변환 기하학적 접근 방법 비교 ························ 40
<표 Ⅳ.1> 기존의 사각형 학습 과정과 대칭성을 이용한 사각형 학습 과정 비교 ··· 44
<표 Ⅳ.2> 수업 개요 ··· 46
<표 Ⅳ.3> 대칭성으로부터 사각형의 성질 연역 과정 ······························ 50
<표 Ⅳ.4> 학생 답안: 사각형의 성질들의 관계 ·· 54

그 림 목 차

[그림 Ⅱ.1] Geometry(Carter et al.): 합동변환의 정의와 핵심 개념 … 13
[그림 Ⅱ.2] Geometry(Carter et al.): 반사의 정의와 핵심 개념 ………… 13
[그림 Ⅱ.3] Geometry(Carter et al.): 평행이동의 정의와 핵심 개념 … 14
[그림 Ⅱ.4] Geometry(Carter et al.): 회전의 정의와 핵심 개념 ………… 15
[그림 Ⅱ.5] Geometry(Carter et al.): 선대칭도형의 정의와 핵심 개념 … 15
[그림 Ⅱ.6] Geometry(Carter et al.): 회전대칭도형의 정의와 핵심 개념 … 16
[그림 Ⅱ.7] Geometry(Carter et al.): 3차원 대칭도형의 정의와 핵심 개념 … 16
[그림 Ⅱ.8] Geometry(Carter et al.): 행렬로 표현한 평행이동 …………… 17
[그림 Ⅱ.9] 수학Ⅰ 교과서(이준열 외): 도형의 평행이동 설명 과정 … 20
[그림 Ⅲ.1] 중학교2 교과서(류희찬 외): 여러 가지 사각형의 관계 ……… 33
[그림 Ⅲ.2] Monaghan(2000): 표준 방향의 평행사변형 ………………………… 34
[그림 Ⅲ.3] Monaghan(2000): 비표준 방향의 평행사변형 …………………… 34
[그림 Ⅳ.1] 여러 가지 사각형 모양 ………………………………………………… 48
[그림 Ⅳ.2] 학생 C의 답안: 여러 가지 사각형의 대칭성 …………………… 48
[그림 Ⅳ.3] 활동지: 평행사변형 ……………………………………………………… 49
[그림 Ⅳ.4] 활동지: 직사각형 ………………………………………………………… 50
[그림 Ⅳ.5] 학생 D의 답안: 직사각형의 대칭성과 성질 ……………………… 50
[그림 Ⅳ.6] 대칭성을 이용한 여러 가지 사각형의 관계 ……………………… 58

Ⅰ. 서론

1. 연구의 목적 및 필요성

2009 개정 교육과정의 성취기준에 따라 중학교 수학2 교과서는 기하 단원에서 정당화 방법을 다양하게 제시하는 데에 주안점을 두고 있다. 사각형 단원의 경우, 주어진 정의 아래 참인 것처럼 보이는 사각형의 성질들이 항상 참인지를 확인하는 데에 초점을 둔다. 그러나 사각형의 정의는 교과서에서처럼 절대적으로 정해진 것이 아니라 관점에 따라 다양하게 범주화될 수 있다(Zazkis, Leikin, 2008). 따라서 학생들이 스스로 추측하고 구성하는 것이 아니라, 정해진 정의와 성질들을 수동적으로 전달받는 것은 참된 기하교육의 방향이라고 보기 어렵다. 이러한 문제점은 사각형의 포함관계 학습으로도 이어진다. 교과서에서 이미 정해놓은 오직 한가지의 방법을 토대로 한 사각형의 포함관계 학습 방법은 피상적인 이해에 그칠 수 있다.

교과서에 제시된 사각형 단원의 학습 방법에 대한 지적은 다음의 연구에서도 찾아볼 수 있다. 조혜미(2014)는 특히 중학교 수학2 교과서 기하단원의 탐구활동에서 ‘기하학적 성질을 추론하기’ 활동이 ‘기하학적 개념, 사실 알기’ 또는 ‘기하학적 성질 적용하기’ 활동보다 상대적으로 비율이 낮음을 지적하였다. 박해민과 이종희(2017)는 교과서에서 ‘성질을 생각해보자’, ‘어떤 사실을 알 수 있는가’, ‘~인지 추측 하여라’ 등의 요구를 하는 것이 학생에게 스스로 지식을 구성하는 추측의 기회를 주었다고 보기 어렵다고 하였다. 또한, 도종훈(2006)은 교과서에서 사다리꼴과 평행

사변형은 변들 간의 “평행”여부를 통해 정의되는 반면, 직사각형과 마름모는 “각”과 변의 “길이”를 통해 결정되는 형식을 취하게 되어 여러 가지 사각형들의 분류와 이들 사이의 포함 관계에 대한 이해가 자연스럽게 이루어지기 어렵다고 하였다. 또 이규희와 최영기(2016)는 교과서나 저자들이 오직 하나의 옳은 수학적 정의가 있다는 입장을 취하기 때문에 학생들 스스로 사각형의 분류에 대해 여러 관점을 갖기에 무리가 있다고 하였다.

한편, National Council of Teachers of Mathematics(이하 NCTM)에서 제시된 <학교수학의 교육과정과 평가의 표준>(1989)에서는 기하영역 가운데 유클리드기하학적, 해석기하학적, 변환 기하학적 등을 포함한 다양한 관점을 절충하여 다룸으로써 학생들에게 문제 상황에 따라 적합한 기하학적 방법과 개념을 효과적으로 적용할 수 있는 능력을 길러 줄 것을 요구하고 있다(우정호, 1998). 또, NCTM(2000)은 변환이 실세계와 수학의 문제해결에 있어 가치 있는 도구이며, 우리의 물리적 환경을 설명하고 번역해준다고 한다. 아울러 변환이 모든 학생들에게 중요한 공부 주제라 강조하며, 특히 6-8학년 기하학습에서 거리를 보존하는 반사대칭, 회전대칭, 평행이동을 학습할 것을 당부하고 있다. 이렇게 NCTM(2000)이 중학교 기하교육에서 변환기하를 강조하는 점은 우리나라 중학교에서는 변환기하가 다뤄지지 않으며, 변환기하가 반영된 전체 학교수학 내용이 적은 현실과 극명하게 대비된다.

이에 본 연구는 대칭성을 이용한 중학교 2학년 사각형의 성질과 포함관계 학습지도 방법을 제안한다. 사각형의 대칭성을 통해 사각형의 다른 성질들을 연역하고 여러 가지 사각형의 포함관계를 추론할 수 있음을 확인하고, 그 교육적 시사점을 논의한다.

2. 연구문제

2009개정 교육과정 이후 중2에서는 사각형의 성질에 대한 증명 대신 다양한 정당화 활동이 권장된다. 김수철(2014), 조미혜(2014)는 중학교 수학 교과서의 기하영역에서 나타나는 정당화 유형을 분석하였다. 이에 따르면 경험적·귀납적 정당화, 예에 의한 정당화, 준연역적 정당화 그리고 형식적·연역적 정당화 등 교과서에서는 다양한 방법을 제시하고 있음을 확인할 수 있다.

그러나 2009개정 교육과정에서 증명이 정당화로 바뀌었음에도, 현장에서는 증명이라는 용어만 정당화로 바뀌었을 뿐 관련 내용은 달라지거나 약화되지 않았다고 느끼는 의견이 제시되었다. 실제로 13종의 교과서에서는 삼각형, 사각형의 성질을 다루는 내용은 가정, 결론 등의 용어와 형식을 사용하지 않을 뿐이지 이전 교육과정의 교과서와 유사한 방식으로 증명을 다루고 있었다(교육부 외, 2016).

증명은 삼각형의 합동조건과 평행선의 성질 등으로 주어진 도형의 성질이 항상 참인지를 확인하는 것으로, 중2 기하 영역에서 처음 도입되는 논증방법이다. 이에 따라 교과서의 흐름은 도형의 정의와 기본 성질 등 불완전한 공리계를 설정하고 이를 근거로 하여 연역적 증명을 하는 유클리드 기하의 추론 방법을 기반으로 한다. 이러한 입장으로 인해 중학교 수학에서는 대칭이나 회전과 같은 직관기하의 영역은 시각적 보조 수단으로 간주되고 있으며 유클리드식의 접근만이 유일한 증명으로 간주되고 있다(우정호, 1998).

이러한 유클리드식의 기하학습은 형식적이고 엄밀한 면으로 인해 학습상의 어려움을 초래하였다. 이에 대한 대안으로 제시된 것이 Klein의 변환기하이다. Klein은 변환기하학을 ‘어떤 특정한 변환 군 아래에서 불

변인 도형의 성질을 연구하는 학문'으로 규정하였다. 변환 기하학적 접근은 기하학적 사고를 동적인 조작으로 변환시킬 뿐만 아니라, 도형의 성질을 더욱 구체적이고 직관적으로 학습할 수 있게 한다.

이에 본 연구에서는 변환기하가 기하교육에서 어떤 역할을 할 수 있는 지를 미국 교육과정과 교과서, 한국 교육과정과 교과서를 비교하여 알아보고자 한다. 또한 중학교 2학년 사각형의 성질 단원을 변환 기하학적 접근으로 지도하여, 기존의 유클리드식의 접근과의 차이점 및 시사점을 도출하고자 한다. 구체적인 연구 문제는 다음과 같다.

1. 변환기하의 비중에 따라 기하학습의 내용 및 전개방식은 어떻게 다른가?

2. 대칭성을 이용한 사각형 학습지도의 결과 및 시사점은 무엇인가?

Ⅱ. 변환기하와 기하교육

1. 변환기하와 대칭

1.1. 수학에서의 대칭

대칭은 예술, 물리 등의 분야뿐만 아니라 수학의 발전에 큰 역할을 하였다. 다양한 수학 영역에서 대칭 아이디어를 쉽게 찾을 수 있다.

예를 들어, Lagrange는 방정식의 근이 존재한다는 가정 하에 근으로 만들 수 있는 모든 가능한 치환을 고려하였다. Galois는 방정식의 근 사이의 대수적 관계를 보존하는 자기동형사상이 이루는 군의 대칭성으로 방정식을 분류하였다. 이어 Klein은 군 개념을 변환군 개념으로 확장하여 다양한 기하 체계를 변환 아래에서의 불변성으로 분류하였다. 이와 같이 군론을 통해 대칭성을 나타낼 수 있으며, 군론에서 대칭성이 중요한 역할을 하는 것을 알 수 있다.

또한 복소수의 기하학적 표현에서도 대칭성을 살펴볼 수 있다. $x^n = 1$의 해는 복소평면에서 단위원에 내접하는 정 n각형의 꼭짓점들을 형성한다. 이때 해들의 집합은 복소평면에서 1부터 $360^\circ/n$ 회전 아래 불변인 위수 n의 회전대칭성을 갖는 단위원에 내접하는 정n각형의 꼭짓점이다.

학교 수학에서도 대칭을 바탕으로 한 내용을 쉽게 발견할 수 있다. 대수에서 등식의 성질과 부등식의 성질은 양변에 대칭적으로 같은 사칙연산을 적용했을 때의 성질을 파악하는 것이다. 또, 역함수, 절댓값을 포함하는 함수, 유리함수 등의 함수의 그래프는 대칭을 통해 학습된다. 특히

우함수, 기함수 등의 경우 함수의 특징에 따라 미분이나 적분의 값을 계산할 때 대칭이 중요한 역할을 하고 있다. 삼각법에서는 $\cos x = \sin(90^\circ - x)$과 같은 대칭적 관계를 발견할 수 있다. 이항정리에서도 각 항의 계수들의 대칭성을 파스칼 삼각형을 통해 관찰할 수 있다. 통계에서는 평균을 중심으로 선대칭 모양인 표준정규분포곡선을 활용하여 통계적 추정을 하고 있다. 이와 같이 대칭개념은 그 자체로 중요하며 기하학습 뿐만 아니라, 전반적인 수학과 학교수학에 내포되어 있음을 알 수 있다.

1.2. 기하에서의 대칭

현행 학교수학에서 다루는 기하는 대부분 유클리드 원론에 수록된 내용과 방식을 따르고 있다. 유클리드 원론은 역사적으로도 수학의 근본이자 학문의 전형으로서 기하 교육을 위한 교재 역할을 해오고 있다. 그러나 형식적·연역적 증명을 통한 전개 방식은 학습에 있어 인지적 어려움을 자아냈고, 도형을 정적으로 보고 동적으로 고찰하지 않는 접근방법은 유클리드원론이 기하 교육의 원형으로서 과연 적절한가에 대해 의문을 품게 하였다. 또한 유클리드의 합동공리는 '도형은 그 모양과 크기를 변하지 않고 한 위치에서 다른 위치로 옮길 수 있다'를 가정하고 있기 때문에 그 역시 기하 연구에서 이동이 불가피함을 알았지만 이동을 수학적으로 뒷받침하지는 못하였다(우정호, 1998).

이에 Klein은 유클리드기하의 결함을 해소하기 위하여 Erlangen Programm을 통해 함수적 사고와 공간직관의 중요성을 강조하며 이동에 수학적인 해석을 제공하는 변환기하학을 창시하였다. Klein은 변환군을 이용하여 기하학을 '어떤 특정한 변환군 아래에서 불변인 도형의 성질을

연구하는 학문'으로 규정하였다. 이러한 정의에 의해 기존의 여러 기하학들은 변환군 사이의 포함관계와 그 아래에서의 불변성에 따라 다음과 같이 위계적으로 분류가능하게 되었다.

(위상변환군) $\supset$ (사영변환군) $\supset$ (아핀변환군) $\supset$ (닮음변환군) $\supset$ (합동변환군)

변환기하학에서 변환군을 대수적으로 정의하면 다음과 같다.

S를 공집합이 아닌 집합이라고 하자. 일대일 대응 함수 $\phi : S \to S$를 S상의 변환이라 할 때, S상의 어떤 변환들의 모임 G가 다음 조건을 만족하면 G를 기하 (S, G)의 변환군이라고 한다.

ⅰ) G는 변환의 합성에 대하여 닫혀 있다.
ⅱ) 항등함수는 G에 속한다.
ⅲ) $\phi \in G$라면 $\phi^{-1} \in G$이다.

합동변환이란 R^2의 임의의 점 x, y에 대하여 x와 y 사이의 거리가 $\phi(x)$와 $\phi(y)$의 거리와 같게 보존하는 변환 $\phi : R^2 \to R^2$ 을 말한다. 합동변환군에는 반사(reflection), 회전(rotation), 평행이동(translation) 등이 속한다.

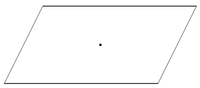
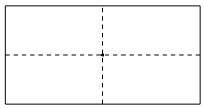
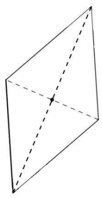
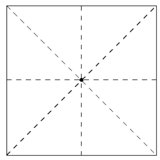
Klein은 유클리드 평면에서 합동변환군에 의해 불변인 도형의 성질을 유클리드적 성질이라 하고, 이런 유클리드적 성질을 다루는 기하학을 유클리드 기하학이라 정의하였다. 즉, 평면 유클리드 기하학은 주어진 평면 위에서 평행이동과 대칭이동 등의 변환 아래 불변인 도형의 성질을 연구하는 학문이라고 할 수 있다(Henle, 2001).

이어 도형 A에 대하여 $\phi(A) = A$를 만족하는 합동변환 ϕ를 A의 대칭

변환이라 하고 A는 ϕ에 의하여 대칭이라고 한다. A의 모든 대칭변환의 집합도 군을 이루는데 이 군을 A의 대칭군이라고 한다.

예를 들어, 사각형에서 항등변환을 I, 대각선의 교점에 의한 180° 회전변환을 R이라 하자. 평행사변형의 경우, $\{I, R\}$ 은 평행사변형의 대칭군이다. 직사각형은 두 인접하는 변의 수직이등분선을 대칭축으로 하는 대칭변환을 각각 M_1, M_2라 할 때, $\{I, R, M_1, M_2\}$ 는 직사각형의 대칭군이다. 마름모는 두 대각선을 대칭축으로 하는 대칭변환을 각각 M_3, M_4라 할 때, 그 대칭군은 $\{I, R, M_3, M_4\}$ 이 된다. 정사각형의 경우, 90°와 270° 회전변환을 각각 R_1, R_2라 하면, 그 대칭군은 $\{I, R, R_1, R_2, M_1, M_2, M_3, M_4\}$ 가 된다(<표 Ⅱ.1>).

<표 Ⅱ.1> 여러 가지 사각형의 대칭의 중심과 대칭축

평행사변형	직사각형	마름모	정사각형
			

한편, Weyl(1952)는 변환 중에서도 대칭을 강조하며 이를 변환 아래에서의 원소의 외형의 불변성이라고 정의하였다. 즉, 기하학적 대상을 변환 조작하였을 때 변환 전과 모양이 일치한다면 그 대상이 대칭성을 가지고 있다고 말할 수 있다. 이때 대상을 불변이게 하는 변환 전체, 변환군은 대상의 대칭성을 나타낸다. 이에 따라 좌우대칭성은 반사변환(reflection)에 대한 불변성을 의미하고, 회전대칭성은 회전변환(rotation)

에 의한 불변성을 의미한다. 위의 예에서는 평행사변형의 180° 회전변환에 의한 불변성, 즉 회전대칭성을 통해 두 쌍의 대변의 길이가 같음을 알 수 있다.

또한 도형의 대칭성을 정의하면 대상을 대칭 변환의 개수에 따라 대칭성의 많고 적음을 말할 수 있게 된다(남진영, 박선용, 2002). 위의 예에서 마름모의 대칭성이 정사각형의 대칭성보다 적으며, 그 변환군이 포함됨을 알 수 있다.

2. 기하교육에서 변환기하의 역할

기하교육에서 변환기하의 역할을 알아보기 위해 우리나라 교육과정과 그에 비해 상대적으로 변환기하를 강조하고 있는 미국 교육과정을 비교하였다. 우리나라 교과서의 경우, 모두 교육부 심의를 거친 교과서이므로 교과 내용의 차이는 거의 없다고 할 수 있다. 이에 본 연구는 2009개정 교육과정을 따르는 초3, 초5 교과서 및 이준열 외(2010)의 수 I 교과서를 분석대상으로 임의로 선정하였다. 미국의 경우, 주마다의 특색 있는 교육과정에 근거하여 교과서가 다양하기에 McGraw-Hill 출판사의 Carter et al의 'Geometry'를 분석대상으로 임의로 선정하였다. 그리고 이 선택으로 발생할 수 있는 일반화 오류를 감소시키기 위해 각 나라의 교육과정 자료를 참고하였다. 본 절에서는 우리나라와 미국의 교과서 및 교육과정 자료에서 변환기하 관련 학습목표와 학습내용의 차이점에 초점을 맞추어 분석한다.

2.1. 미국 교육과정에서 변환기하

NCTM(2000)에서는 수와 연산, 대수, 기하, 측정, 자료 분석과 확률의 다섯 가지 수학의 내용영역에서 기대 목표를 제시하였다. 미취학 과정부터 12학년에 걸친 교육프로그램을 통한 기대 목표 중 '기하'에 해당하는 내용은 다음과 같다.

· 2차원과 3차원의 기하학 도형의 특징과 성질을 분석하고 기하학적 관계에 대한 수학적 토론(argument)을 전개한다.

· 위치를 구체화하고 좌표 기하와 다른 표현 체계를 사용하여 공간적 관계를

설명한다.

· 변환과 대칭을 이용하여 수학적 상황을 분석한다.

· 문제를 해결하기 위해 시각화, 공간적 추론 그리고 기하학적 모델링을 사용한다.

위의 내용 중 세 번째에 해당하는 '변환과 대칭을 이용하여 수학적 상황을 분석하는 능력'에 대한 학습 단계별 세부 기대 목표는 <표Ⅱ.2>와 같다.

<표 Ⅱ.2> NCTM(2000)의 학습 단계별 기대 목표

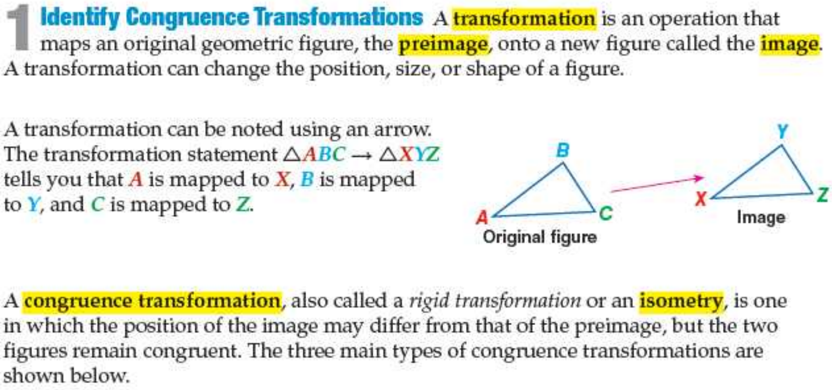
기준	변환과 대칭을 이용하여 수학적 상황을 분석한다.
미취학-2학년	-밀기, 뒤집기, 돌리기를 인식하고 적용한다. -대칭 도형을 인식하고 만들어낸다(create).
3-5학년	-2차원 도형의 밀기, 뒤집기, 돌리기의 결과를 추측하고 설명한다. -두 도형이 합동임을 보이기 위해 운동(motion) 또는 일련의 운동(motion)을 설명한다. -2차원과 3차원의 도형과 디자인에서 선대칭과 회전대칭을 구별하고 설명한다.
6-8학년	-뒤집기, 돌리기, 밀기 그리고 확대축소(scaling)와 같은 비형식적 변환으로 도형의 크기, 위치, 방향을 설명한다. -변환을 사용하여 대상의 합동, 닮음, 그리고 선대칭 또는 회전대칭을 판단한다.
9-12학년	-평면 위에서 대상의 평행이동, 반사, 회전 그리고 닮음(dilation)을 스케치, 좌표, 벡터, 함수 개념, 그리고 행렬을 이용하여 표현하고 이해한다. -단일 변환과 그 합성의 효과의 이해를 돕기 위해 다양한 표현 방법을 사용한다.

저학년과정에서 학생들은 도형의 이동에 대해 원래 갖고 있던 직관을 밀기, 뒤집기, 돌리기와 같은 조작활동으로 학습한다. 그 뒤 변환기하에 대한 내용은 점점 형식적이고 체계적으로 진행된다. 3-5학년에서는 변환의 결과를 관찰하고 추측하며 그것을 설명하기 시작한다. 6-8학년은 성질을 보존하는 변환의 의미를 통해 합동, 닮음, 대칭을 판단하고 설명한다. 9학년 이후는 함수를 포함하여, 행렬, 벡터 등 변환을 표현하는 다양한 방법과 변환의 합성을 배운다. 전 12학년 과정에서 대칭은 수학과 심미적 통찰력을 길러줄 수 있다는 전제 아래 그 학습이 강조되고 있다.

본 연구에서 분석 대상으로 하는 Carter et al. (2010) Geometry 교과서는 점, 선, 면부터 평면도형, 입체도형의 성질까지 내용을 포함하는 책으로, 9학년부터 12학년까지의 전반적인 기하내용을 총체적으로 다룬다. 본 연구는 Carter et al. (2010) 내용 중 변환기하를 다루는 4단원과 9단원에 중점을 맞추어 살펴보고자 한다.

4단원, 합동 삼각형(Congruent Triangles)은 먼저 합동인 삼각형을 정의하고, 이에 대한 유클리드식의 접근인 SSS, SAS, ASA와 AAS 삼각형의 합동조건을 다룬다. 그리고 마지막 4-7 소단원 합동변환(Congruence Transformation)에서는 변환 기하학적 관점에서 합동인 삼각형을 다룬다. 이때 변환이란, 원래의 이미지를 새로운 이미지로 대응시키는 연산(operation)으로 화살표로 나타낼 수 있는 것이다.

이어서 합동변환, 또는 강체 변환(rigid transformation)이란 위치는 바뀔 수 있어도 모양은 보존하는 변환이고, 그 유형으로 반사(reflection), 평행이동(translation) 그리고 회전(rotation)이 있음을 설명한다([그림 Ⅱ.1]). 또 다양한 도형을 비롯하여 좌표평면 위에서의 도형과 실생활 소재에서 합동변환의 예시를 통해 문제에서 주어진 변환이 합동변환인지를 판단하는 활동을 제공한다.



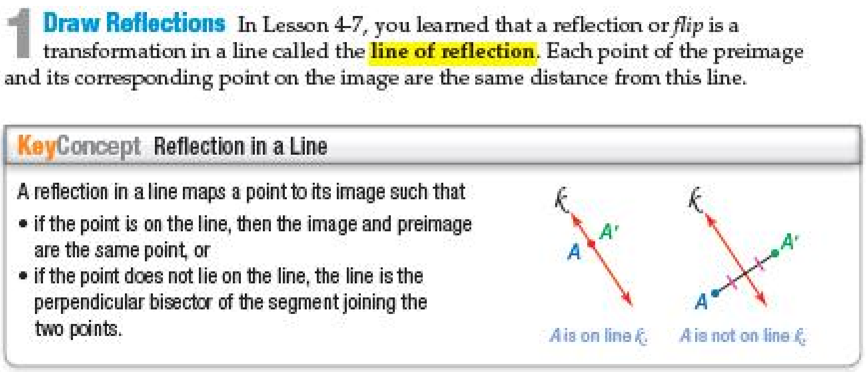
Identify Congruence Transformations A **transformation** is an operation that maps an original geometric figure, the **preimage**, onto a new figure called the **image**. A transformation can change the position, size, or shape of a figure.

A transformation can be noted using an arrow. The transformation statement $\triangle ABC \rightarrow \triangle XYZ$ tells you that A is mapped to X, B is mapped to Y, and C is mapped to Z.

A **congruence transformation**, also called a *rigid transformation* or an **isometry**, is one in which the position of the image may differ from that of the preimage, but the two figures remain congruent. The three main types of congruence transformations are shown below.

[그림 Ⅱ.1] Geometry(Carter et al.): 합동변환의 정의와 핵심 개념

그리고 9단원 변환과 대칭(Transformations and Symmetry)은 변환을 표현하는 다양한 방법 및 관련된 문제를 소개하고 나아가 3차원 도형의 대칭을 설명한다. 9-1 반사(reflection) 소단원 내용에 따르면, 반사대칭은 앞서 배운 뒤집기에 해당하는 변환이며, 이때 원상(preimage)의 점들과 이들에 대응하는 상(image)의 점들은 대응축으로부터 같은 거리에 있다([그림 Ⅱ.2]). 또한 반사는 등거리변환(isometries)으로 길이, 각 등을 보존하지만 원상과 상의 방향은 반대이다.



Draw Reflections In Lesson 4-7, you learned that a reflection or *flip* is a transformation in a line called the **line of reflection**. Each point of the preimage and its corresponding point on the image are the same distance from this line.

KeyConcept Reflection in a Line

A reflection in a line maps a point to its image such that

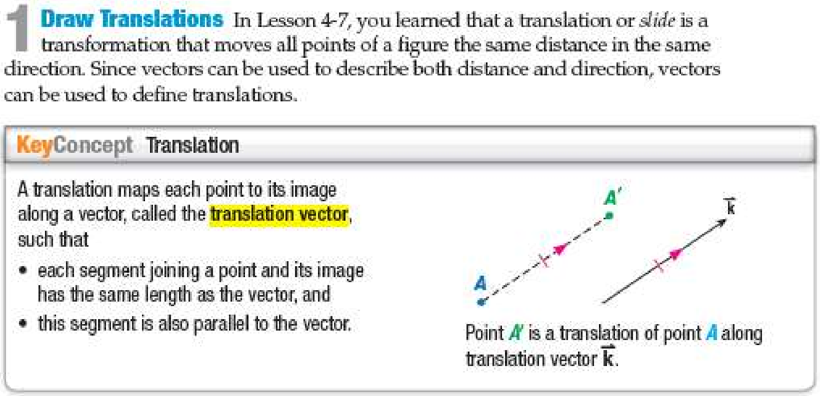
- if the point is on the line, then the image and preimage are the same point, or
- if the point does not lie on the line, the line is the perpendicular bisector of the segment joining the two points.

[그림 Ⅱ.2] Geometry(Carter et al.): 반사의 정의와 핵심 개념

이어서 좌표평면에서 특히 x축, y축, 또는 $y=x$ 직선을 축으로 도형

을 선대칭 시킬 때 나타나는 점의 좌표 변환의 특징을 다루고, 실생활문제로 선대칭을 활용한 최소거리문제 등을 제시한다.

9-2 평행이동(translations) 소단원은 평행이동을 주어진 도형의 모든 점들을 같은 방향과 같은 거리로 이동시키는 변환이라고 설명한다. 이때 벡터는 거리와 방향을 모두 설명하는 데에 쓰일 수 있기 때문에, 평행이동을 정의하는 도구로 활용된다([그림 Ⅱ.3]).


1 **Draw Translations** In Lesson 4-7, you learned that a translation or *slide* is a transformation that moves all points of a figure the same distance in the same direction. Since vectors can be used to describe both distance and direction, vectors can be used to define translations.

KeyConcept Translation

A translation maps each point to its image along a vector, called the **translation vector**, such that

- each segment joining a point and its image has the same length as the vector, and
- this segment is also parallel to the vector.

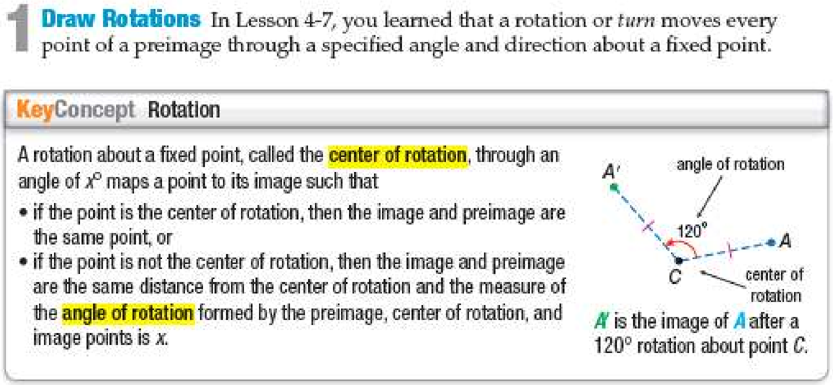
Point A' is a translation of point A along translation vector $\vec{k}$.

[그림 Ⅱ.3] Geometry(Carter et al.): 평행이동의 정의와 핵심 개념

이어서 좌표평면에서 주어진 벡터로 도형을 평행이동 시켜보며, 행진하는 악단의 포지션을 평행이동으로 설명하게 하는 등 실생활문제를 제공한다.

9-3 회전(rotation) 소단원에 따르면, 회전은 원상의 모든 점을 고정점으로부터 특정 각과 방향으로 이동시키는 것이다. 대칭의 중심이 아닌 점들은 원상과 상이 대칭의 중심으로부터 같은 거리에 있으며, 회전각은 원상, 대칭의 중심 그리고 상으로부터 형성된다([그림 Ⅱ.4]).

다음으로 좌표평면에서 특히 원점을 중심으로 주어진 도형을 회전시킬 때 나타나는 점의 좌표 변환의 특징 등을 다룬다.



Draw Rotations In Lesson 4-7, you learned that a rotation or *turn* moves every point of a preimage through a specified angle and direction about a fixed point.

KeyConcept Rotation

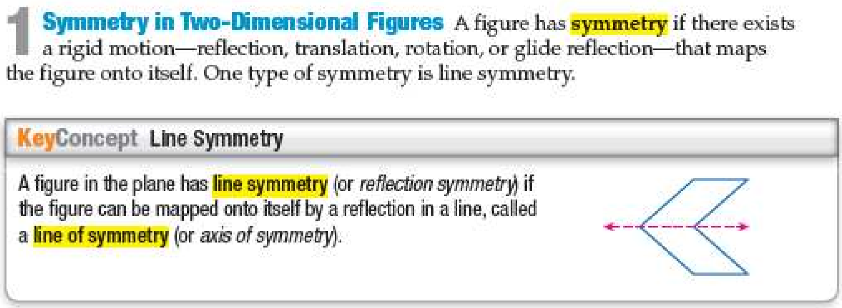
A rotation about a fixed point, called the **center of rotation**, through an angle of $x°$ maps a point to its image such that

- if the point is the center of rotation, then the image and preimage are the same point, or
- if the point is not the center of rotation, then the image and preimage are the same distance from the center of rotation and the measure of the **angle of rotation** formed by the preimage, center of rotation, and image points is x.

A' is the image of A after a 120° rotation about point C.

[그림 Ⅱ.4] Geometry(Carter et al.): 회전의 정의와 핵심 개념

9-5 대칭(Symmetry) 소단원은 보다 실생활 소재를 활용하여 2차원 또는 3차원 그림을 보고 선대칭 또는 점대칭을 얼마나 갖는지 판단하는 내용으로 구성되었다. 2차원에서 대칭도형이란 반사, 평행이동, 회전 또는 미끄럼 반사(glide reflection)로 자기 자신에게 사상시키는 강체운동이 존재하는 것을 말한다. 평면에서 선대칭도형은 대칭축에서 자신을 반사시켰을 때 그 자신으로 대응되는 도형이다([그림 Ⅱ.5]). 평면에서 회전대칭도형은 도형의 중심에서 0°에서 360° 사이의 회전에 의해 그 자신으로 대응되는 도형이다([그림 Ⅱ.6]).

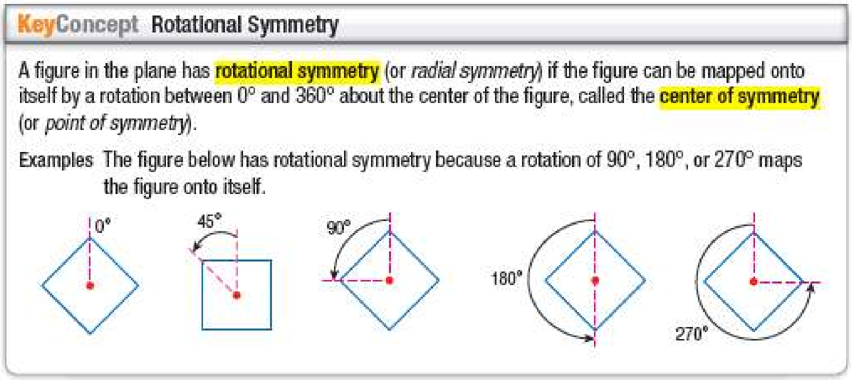


Symmetry in Two-Dimensional Figures A figure has **symmetry** if there exists a rigid motion—reflection, translation, rotation, or glide reflection—that maps the figure onto itself. One type of symmetry is line symmetry.

KeyConcept Line Symmetry

A figure in the plane has **line symmetry** (or *reflection symmetry*) if the figure can be mapped onto itself by a reflection in a line, called a **line of symmetry** (or *axis of symmetry*).

[그림 Ⅱ.5] Geometry(Carter et al.): 선대칭도형의 정의와 핵심 개념

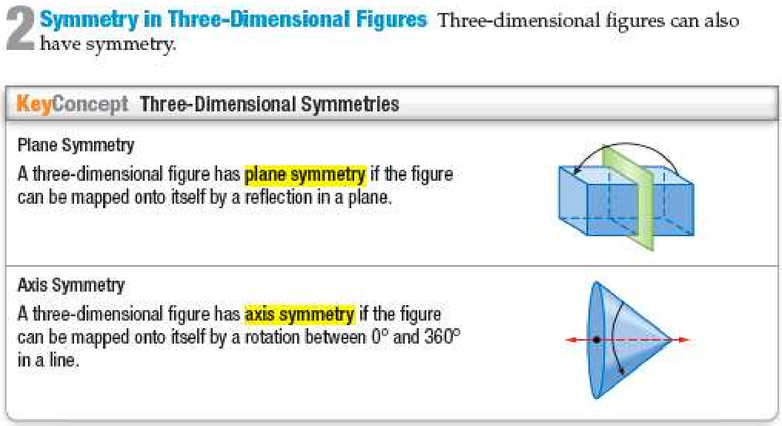

KeyConcept **Rotational Symmetry**

A figure in the plane has **rotational symmetry** (or *radial symmetry*) if the figure can be mapped onto itself by a rotation between 0° and 360° about the center of the figure, called the **center of symmetry** (or *point of symmetry*).

Examples The figure below has rotational symmetry because a rotation of 90°, 180°, or 270° maps the figure onto itself.

[그림 Ⅱ.6] Geometry(Carter et al.): 회전대칭도형의 정의와 핵심 개념

3차원 도형도 대칭을 가질 수 있다. 3차원에서 도형이 평면에 의한 반사로 그 자신에 대응된다면 평면대칭(Plane Symmetry)을 갖는다. 3차원에서 도형이 한 직선에서 0°에서 360° 사이의 회전에 의해 그 자신에 대응된다면 축대칭(Axis Symmetry)을 갖는다([그림 Ⅱ.7]).


2 Symmetry in Three-Dimensional Figures Three-dimensional figures can also have symmetry.

KeyConcept **Three-Dimensional Symmetries**

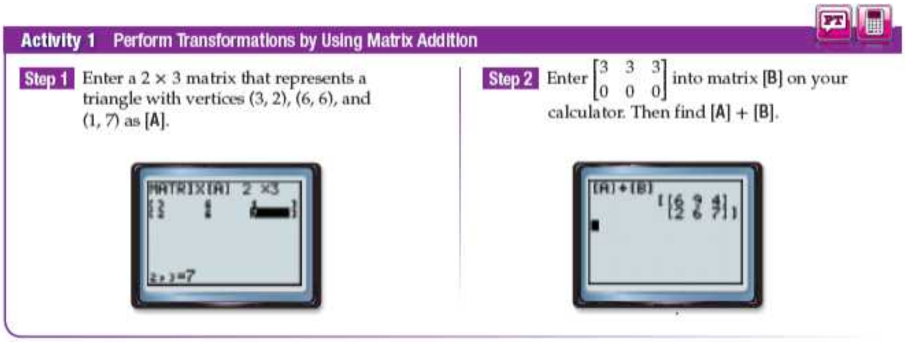
Plane Symmetry
A three-dimensional figure has **plane symmetry** if the figure can be mapped onto itself by a reflection in a plane.

Axis Symmetry
A three-dimensional figure has **axis symmetry** if the figure can be mapped onto itself by a rotation between 0° and 360° in a line.

[그림 Ⅱ.7] Geometry(Carter et al.): 3차원 대칭도형의 정의와 핵심 개념

9-6 소단원은 행렬을 이용한 변환을 다룬다. 어느 한 도형의 각 점에 대응하는 좌표가 주어졌을 때, 그 x좌표로 1행을, y좌표로 2행을 순서대로 구성된 행렬을 만든 후 그 행렬에 다른 행렬을 더하고, 곱하며 행렬 연산이 그 도형을 어떻게 변환하였는지를 관찰하게 한다([그림

Ⅱ.8]).



[그림 Ⅱ.8] Geometry(Carter et al.): 행렬로 표현한 평행이동

이와 같이 Carter et al. (2010)는 반사, 평행이동, 회전 등을 합동변환의 종류로서 제시한다. 즉, 이들은 모두 도형의 위치는 바꿀 수 있어도 모양은 보존하는 변환임이 강조된다. 그리고 도형의 변환을 관찰하며 각 변환의 특징을 충분히 배운 뒤, 도형을 좌표평면 위로 옮겨 점의 좌표의 변환의 특징을 살펴본다. 그리고 함수, 벡터, 행렬 등 다양한 수학 영역과 바로 연결 지으며 변환 기하학적 관점에서 일관적인 개념이해를 도모하고 있음을 알 수 있다. 더불어 실생활 소재를 활용하고 실생활 관련 문제를 해결하며 생활 속의 변환을 생각해보는 기회를 제공한다.

2.2. 우리나라 교육과정에서 변환기하

우리나라 2009 개정 교육과정에서 변환기하와 관련되는 내용은 대부분 합동변환과 관련되며, 초등학교 3학년의 '평면도형의 이동', 5학년의 '도형의 대칭', 고등학교 1학년의 '도형의 이동'에서 등장한다. 각각의 내용에 해당하는 2009 개정 교육과정 내용 성취기준은 <표 Ⅱ.3>와 같다.

<표 Ⅱ.3> 2009 개정 교육과정의 내용 성취기준

초 3	구체물의 밀기, 뒤집기, 돌리기 활동을 통하여 그 변화를 이해한다. 평면도형의 이동을 이용하여 규칙적인 무늬를 꾸밀 수 있다.
초 5	선대칭도형과 점대칭도형의 의미를 알고 그릴 수 있다.
고 1	평행이동의 의미를 이해한다. 원점, x축, y축, 직선 $y=x$에 대한 대칭이동의 의미를 이해하고 이를 설명할 수 있다.

구체적으로 이 성취기준에 따르면 초등학교 3학년에서는 평면도형의 밀기, 뒤집기 그리고 돌리기 활동을 통해 그 변화를 이해시키고, 이를 이용하여 규칙적인 무늬를 꾸미도록 한다(교육부, 2014). 초등학교 5학년에서는 선대칭도형과 점대칭도형을 학습한다. 이때 선대칭도형이란 한 직선을 따라 접어서 완전히 겹쳐지는 도형이고, 그 직선을 대칭축이라고 정의한다. 점대칭도형이란 한 도형을 어떤 점을 중심으로 180° 돌렸을 때 처음 도형과 완전히 겹쳐지는 도형이고, 그 점을 대칭의 중심이라고 정의한다(교육부, 2014). 이렇듯 대칭도형은 합동을 배운 직후 학습되는데에도 불구하고, 합동과 연결해서 정의되지 않는다. 즉, 선대칭과 점대칭의 중요한 특징인 합동변환, 도형의 위치는 바꿀 수 있어도 모양은 보존한다는 점이 강조되고 있지 않다. 한길준 외(2007)는 초등학교에서 대칭이동 등을 학습할 때 합동변환에 대한 이해의 부족으로 학생들이 대칭이동 후의 도형이 처음 도형과 합동이 되어야한다는 사실을 간과하는 경향이 있음을 지적하였다.

고등학교 1학년에서는 좌표평면에서 도형을 평행이동 또는 대칭이동했을 때 도형의 방정식과 그래프를 구한다. 이때 평행이동이란, 좌표평면 위의 점 (x,y)를 $(x+a,y+b)$로 옮기는 것이다. 대칭이동이란 좌표평면 위의 점 (x,y)를 한 점 또는 한 직선에 대하여 대칭인 점(x',y')로 옮기는 것이다. 박정선(2005)에 따르면 학생들은 대부분 주어진 함수 그래프에서 역함수의 그래프를 그릴 때, $y=x$에 대칭인 관계임을 아는 데도 불구

하고 잘 그리지 못한다고 한다. 최민아(2009)도 도형의 방정식 $y=f(x)$의 그래프가 주어졌을 때 $y=-f(x)$, $y=f(-x)$, $y=-f(-x)$, $x=f(y)$ 의 그래프를 그리라는 문항에서 대부분의 학생들이 각각의 방정식이 어떤 대칭이동인지 판단할 수 있지만 좌표평면 위에 제대로 표현하지 못하는 오류를 범한다고 하였다. 즉, 도형을 대칭이동 시켰을 때 도형의 어떤 성질이 보존되는지에 대한 이해가 부족한 것이다.

위와 같이 변환기하 관련 내용들은 교육과정에서 충분히 다루어지지 못하고 있으며, 교사와 학생 모두 지도와 학습에서 어려움을 토로하고 있는 부분으로 꾸준히 지적되고 있다(김남희 외, 2011). 그럼에도 불구하고 현재 학교수학에서 변환기하는 내용과 깊이 면에서 달라지지 않았으며, 변환기하를 다루는 초등학교 5학년과 고등학교 1학년 사이의 시기상 간격이 커 학습의 연속성이 떨어지고 있다. 특히 '대칭'은 학교수학에서 함수, 확률, 대수 등에서 분할 제시되고 있어 변환 기하학적 관점이 강조되고 있지 않다.

2.3. 우리나라와 미국의 변환기하 교육 과정 비교

우리나라 교육과정에서 함수 그래프의 평행이동과 대칭이동은 변환기하학적 관점보다 그래프를 그리기 위한 수단으로서 다루어지고 있기 때문에 도형의 성질의 보존에 대한 이해의 부족으로 인한 오류를 낳게 할 수 있다.(최민아, 2009). 또한 평행이동과 대칭이동이 '도형의 이동' 단원으로 묶여있지만 변환들이 가지는 공통적인 특징보다 개개의 변환에 개별적으로 접근하기 때문에 전체를 관통하는 보편적 성질, 변환의 불변성을 전달하고 있지 못하다(유윤재, 2013).

예를 들어 이준열 외(2009) 수학Ⅰ 교과서는 $f(x-a, y-b)=0$ 그래프가

$f(x,y)=0$ 그래프를 x축 방향으로 $+a$만큼, y축 방향으로 $+b$만큼 평행이동한 것인 이유를 [그림 Ⅱ.9]와 같이 설명한다. 임의의 점 (x,y)가 평행이동하면 $(x+a, y+b)$ 가 되는데 이를 (x', y')라 하면, $x=x'-a$, $y=y'-b$가 되어 $f(x,y)=0$에 대입하면 $f(x'-a, y'-b)=0$ 이다. 따라서 평행이동한 그래프의 식은 $f(x-a, y-b)=0$이다. 이러한 설명 방식은 학생들의 직관과 모순되어 이해하는 데에 어려움이 있다고 지적되고 있다(김남희 외, 2011).

이제 좌표평면 위에서 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 도형의 방정식을 구해 보자.

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$를 평행이동

$$(x, y) \longrightarrow (x+a, y+b)$$

에 의하여 이동한 점을 $\mathrm{P}'(x', y')$이라고 하면

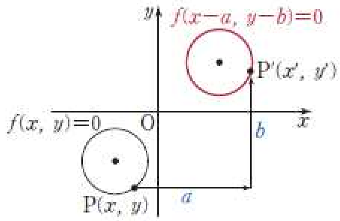
$$\begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \end{cases}, \text{ 즉 } \begin{cases} x=x'-a \\ y=y'-b \end{cases}$$

이다. 이것을 $f(x, y)=0$에 대입하면

$$f(x'-a, y'-b)=0$$

이 성립한다.

따라서 점 $\mathrm{P}'(x', y')$은 $f(x-a, y-b)=0$이 나타내는 도형 위에 있다.



[그림 Ⅱ.9] 수학Ⅰ 교과서(이준열 외): 도형의 평행이동 설명 과정

반면, Carter et al. (2010) 교과서에서는 이를 변환 기하학적 관점에서 설명한다. 먼저 좌표가 없는 평면에서 주어진 도형을 주어진 벡터로 평행이동 시키는 활동을 한다. 그 후, 좌표평면으로 그 도형을 옮겨 평행이동 시키면 점의 좌표가 어떻게 변화하는 지 살펴본다. 함수 $f(x,y)=0$을 좌표평면에서 $< p, q >$만큼 평행이동 했을 때 함수식을 구하는 것은 연습

문제로 다루어진다. 이렇게 순차적으로 변환 기하학적 관점에서 나아갈 경우, 평행이동한 점을 (x,y)로 두면, 옮기기 전의 점은 $(x-p, y-q)$가 된다. 그리고 $(x-p, y-q)$이 변환 전의 점이라는 것을 f를 이용하여 진술하면 $f(x-p, y-q)=0$이 된다. 왜냐하면 평행이동 변환은 함수 그래프의 모양을 보존시키기 때문에 f를 이용한 식을 만족시켜야 하기 때문이다. 그러므로 구하는 함수식은 $f(x-p, y-q)=0$이다. 이러한 설명 방식은 변환을 역으로 이용한 것으로 변환 기하학적 관점이 강조된 것이다.

마찬가지로 대칭이동한 함수의 식 또한 변환의 불변성을 강조하며 지도할 수 있으며, 이를 통해 평행이동과 대칭이동 변환의 공통점을 설명할 수 있다.

앞서 살펴본 미국과 우리나라의 변환기하 학습내용을 비교해보면 <표 Ⅱ.4>와 같다.

<표 Ⅱ.4> 미국과 우리나라의 변환기하 교육과정 비교

	미국 교육과정	우리나라 교육과정
변환기하 학습목표	변환과 대칭을 이용하여 수학적 상황을 분석한다.	제시하지 않는다.
변환기하 학습시기	미취학 과정부터 12학년까지 학습한다.	초등학교 3학년과 5학년, 고등학교 1학년에서 학습한다.
합동변환 정의	합동변환이란 위치는 바뀔 수 있어도 모양은 보존하는 변환으로, 반사, 평행이동, 회전 등이 해당된다.	정의하지 않는다.
합동변환 학습 순서	합동변환을 정의하고 그 종류로서 반사, 평행이동, 회전 등을 학습한다. 그 후 좌표평면 위에서 각각의 변환의 특징을 다루고 대칭도형을 변환의 관점에서 정의한다.	대칭도형이 먼저 등장하고 이를 접거나 돌렸을 때 완전히 겹쳐지는 도형으로 정의한다. 좌표 평면 위의 평행이동, 대칭이동에 따른 점의 좌표와 그래프 식의 변화를 학습한다.
합동변환과 다른 영역의 연결	평행이동, 반사, 회전 등의 변환을 좌표, 벡터, 함수, 행렬 등을 이용하여 다양하게 표현한다.	좌표 평면 위에서 점과 도형의 평행이동, 대칭이동을 살펴본다.

앞서 다룬 내용을 요약하면 첫째, 우리나라 교육과정에서는 변환기하 학습목표를 직접적으로 명시하지 않는 반면, 미국 교육과정에서는 변환과 대칭으로 기하 도형뿐만 아니라 수학적 상황을 분석하기를 목표로 제시한다. 둘째, 변환기하 내용 학습시기의 경우, 우리나라는 초등학교와 고등학교로 분리되어 있고, 미국은 전 학년에서 권장되고 있다. 이렇게 두 나라에서 변환기하학습에 두는 비중의 차이는 학습내용으로도 이어진다. 셋째, 미국 교육과정에서는 합동변환 정의를 제시하고, 그 하위 종류로 반사, 평행이동, 회전 등을 설명하여 이들이 모두 도형의 모양을 보존

하는 변환임을 강조하고 있다. 우리나라 교육과정에서는 합동변환이라는 단어가 등장하지 않으며 합동은 유클리드기하식의 접근으로만 다루어진다. 넷째, 미국교육과정에서는 합동변환을 먼저 다루고 대칭도형을 학습한다. 때문에 선대칭도형과 회전대칭도형은 특히 반사변환, 회전변환 후 자신으로 대응되는 도형으로 “변환”을 통해 정의된다. 그 반면, 한국 교육과정에서는 초등학교에서 선대칭도형과 점대칭도형을 먼저 학습하는데, 앞서 배우는 도형의 합동과 관련하여 다루지 않기 때문에, “변환”이라는 함수적 측면이 상대적으로 강조되지 않는다. 따라서 대칭도형은 돌리기, 접기, 겹치기 등 비형식적 용어를 통해 정의된다. 또한 선대칭과 점대칭을 함께 다루지 않고 분리 학습하기 때문에 두 대칭변환의 공통적 성질이 잘 드러나지 않는다. 이후 고등학교에서 도형의 이동을 배울 때도 평행이동, 대칭이동의 공통 성질인 합동변환의 불변성보다 개개 변환의 그래프식의 변화에 집중하여 학습하고 있다. 다섯째, 미국 교육과정에서는 합동변환을 나타내는 다양한 표현 방법인 좌표, 함수, 벡터, 행렬 등을 학습하고 있는 반면 우리나라 교육과정에서는 좌표평면 위에서의 점과 도형의 변환만을 학습하고 있다.

2.4. 변환기하교육의 필요성

변환기하학습의 역할 및 장점은, 변환의 불변성을 이용하여 기하학적 대상을 더 직관적으로 학습할 수 있다는 것이다. 기하의 형식적 측면을 덜어주고 더불어 등거리 변환이라는 핵심적인 개념을 통해 평행이동, 반사, 회전 등을 통합적 관점에서 이해할 수 있게 한다.

또한, 변환을 나타내는 다양한 표현 방법을 학습하며 여러 수학 영역을 연결 지을 수 있다. 행렬, 함수, 벡터 등 대수적, 해석적으로 여러 가

지 변환을 표현할 수 있고, 이들을 변환을 나타내는 도구라는 새로운 관점으로 학습할 수 있다.

NCTM(1989)은 다음과 같은 이유에서 학교수학에 변환기하학을 도입하여야 한다고 하였다.

첫째, 평행, 회전, 대칭이동 등 변환은 함수의 좋은 예가 된다. 기하의 기본 개념이면서도 지금까지 직관적으로 취급된 합동, 닮음 등의 개념을 자연스럽게 함수적 관점에서 지도할 수 있다. 둘째, 초등기하에서의 합동변환, 닮음 변환과 그에 대한 불변성의 개념은 장래 사영기하, 아핀기하, 위상기하 등을 학습하기 위한 준비가 된다. 셋째, 변환은 강력한 문제해결을 위한 도구가 된다. 넷째, 변환군과 변환의 행렬 표현 등은 대수학적인 내용과 기하학적인 내용의 관련성과 공통된 구조를 보여주는 소재가 된다(우정호, 1998).

이러한 필요성을 인식하고 변환 기하학적 관점을 접목하여 기존 학교수학내용의 제한점을 보완하거나 새롭게 해석하려는 시도가 있었다. 조차미(2012)는 타원의 지도 방안을 변환 기하학적 관점에서 Freudenthal의 국소적 조직화 원리를 도입하여 제시하였다. 현재 학교수학에서 정의하고 있는 타원은 '두 점으로부터 거리의 합이 같은 점들의 자취'로 학생들에게 정의할 기회를 주지 않으며, 타원의 기하학적 의미가 축소되었음을 지적하였다. 원을 x축 또는 y축으로 일정하게 늘린 것이 타원이며 이것을 앞서 배운 일차변환을 통해 제시한다면 원과 타원 개념의 개별화를 막을 수 있으며, 아울러 원에서 타원으로의 변형에서 불변하는 성질에 대한 관계를 찾을 수 있다고 주장하였다.

남진영과 박선용(2002)은 초등수학에서 다루어지는 '무늬 만들기' 단원에서 무늬를 옮기기, 뒤집기, 돌리기 등 조작을 함으로써, 군의 연산을 무의식적으로 경험할 수 있다고 하였다. 위 조작들은 각각 도형의 평행

이동, 선대칭, 점대칭 변환에 해당한다. 여러 조작의 합성과 합성의 순서를 바꾸면 결과가 달라진다는 것 등을 통해 군의 연산(변환)과 관련된 내용을 경험할 수 있으며, 그러한 변환 아래 도형의 불변성을 관찰할 수 있다고 하였다.

Ⅲ. 사각형 학습에 대한 선행 연구와 고찰

1. 사각형 학습에 대한 연구

학생이 유클리드 기하를 학습하는 데에 직면하는 어려움은 어떻게 증명이 기능하고 어떻게 수학적으로 생각해야하는지에 대한 고려 없이 기계적으로 암기하는 데에서 나타난다(Clausen-May et al., 2000). De Villiers(1994)는 도형의 위계적 성질과 조건을 강요하여 외우게 하거나, 경험으로 발견한 정보의 집합으로 기하를 다뤄서는 안 된다고 하였다. 공리와 정리를 암기하는 것은 학생들이 수학적으로 증명하게 하는 데에 도움이 되지 못한다고 비판하였다. 또, Leung(2008)은 사각형을 학습하기 위해 성질들을 단순히 확인-비교하는 수업, 한 사각형이 다른 사각형의 성질을 모두 갖고 있는지 확인-비교하는 수업을 지적하였다. 기하도형을 확인-비교하여 구분하는 것은 학생들의 논리적 추론의 발달과 추상적 기하문제 해결에 도움이 되지 못하기 때문이다.

이렇게 사각형의 성질을 암기하거나 단순 확인-비교하는 학습이 비판을 받는 데에도 불구하고 이러한 학습이 지속되는 이유 중 하나는 교과서가 사각형의 성질을 질서 없이 병렬식으로 제시하기 때문이다. 교사는 학생들이 스스로 성질을 탐구할 수 있도록 도형의 성질을 추구하는 다양한 관점을 지도해야 한다.

Zazkis와 Leikin(2008)은 정사각형을 정의하는 방법에 따라 정사각형을 탐구하는 데에 서로 다른 관점을 제공할 수 있다고 하였다. 그들에 따르면 (1) 변과 각에 특별한 특징을 가진 정사각형, (2) 특정 사각형(직

사각형, 마름모, 평행사변형)의 한 유형으로서 정사각형, (3) 대칭성을 갖는 사각형으로서의 정사각형, 그리고 (4) 평면에서 점의 자취로서 정사각형으로 그 정의를 범주화할 수 있다. 그리고 이렇게 다양한 정의들 중에서 교사와 교과서로부터 선택된 정의가 과연 학습자에게 교육적으로 적합한지에 대한 고려가 필요하다고 하였다.

한편, Usiskin et al(2008)은 사각형의 다양한 성질을 나열하고 이 중 한 가지 관점으로부터 일관적으로 그 위계구조를 체계화하였다. 다음 표는 각의 크기와 특징, 변의 길이와 특징, 대각선의 길이와 특징, 대각선으로 분할된 삼각형들의 특징 그리고 대칭성에 따라 사각형들을 분류한 것이다(<표 Ⅲ.1>, <표 Ⅲ.2>, <표 Ⅲ.3>, <표 Ⅲ.4>, <표 Ⅲ.5>).

<표 Ⅲ.1> 각의 크기와 특징에 따른 사각형의 분류

사각형	평행사변형	직사각형	마름모	정사각형
4개의 각으로 구성됨	2쌍의 대각의 크기 같음	모든 각의 크기 같음	2쌍의 대각의 크기 같고 대각선으로 각이 이등분됨	모든 각의 크기 같고 대각선으로 각이 이등분됨

<표 Ⅲ.2> 변의 길이와 특징에 따른 사각형의 분류

사각형	평행사변형	직사각형	마름모	정사각형
4개의 변으로 구성됨	2쌍의 대변의 길이 같음	모든 인접한 변들이 수직임	모든 변의 길이가 같음	모든 인접한 변들이 수직이고 길이가 같음

<표 Ⅲ.3> 대각선의 길이와 특징에 따른 사각형의 분류

사각형	평행사변형	직사각형	마름모	정사각형
2개의 대각선을 가짐	대각선이 서로 다른 것을 이등분함	대각선들의 길이가 같고 서로 다른 것을 이등분함	대각선들이 수직을 이루고 서로 다른 것을 이등분함	대각선들의 길이가 같고 수직을 이루며 서로 다른 것을 이등분함

<표 Ⅲ.4> 대각선으로 분할된 삼각형의 특징에 따른 사각형의 분류

사각형	평행사변형	직사각형	마름모	정사각형
4개의 삼각형으로 나뉨	2쌍의 마주보는 삼각형이 합동임	2쌍의 마주보는 이등변삼각형이 합동임	4개의 직각삼각형이 합동임	4개의 직각이등변삼각형이 합동임

<표 Ⅲ.5> 대칭성에 따른 사각형의 분류

사각형	평행사변형	직사각형	마름모	정사각형
	점대칭 사각형	2개의 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형	2개의 대각선에 의한 선대칭 사각형	2개의 수직이등분선과 2개의 대각선에 의한 선대칭 사각형

이와 같이 사각형을 정리하면 하나의 관점에서 사각형의 성질들을 통찰하고 위계적으로 분류할 수 있다는 장점이 있다. 그러나 '마름모는 대각선으로 각이 이등분된다.', '직사각형은 모든 인접한 변이 수직이다.', '마름모는 대각선으로 나누어진 4개의 직각삼각형이 합동이다.' 등은 우리나라 교육과정에 명시적으로 다루는 내용이 아니거나 학생들에게 표현이 어색할 수 있기 때문에 실제 학습방법으로 활용하는 데에 어려움이 따를 수 있다. 반면, 사각형의 '대각선의 길이와 특징'은 앞서 각 사각형의 성질로 정리한 내용이고 '대칭성'은 초등학교 5학년에서 다루었기 때

문에 이 방법들을 이용하여 사각형들을 분류한다면 현재 중학교 2학년 학생들의 이해에 무리가 없을 것으로 보인다.

한편, Miyakawa(2017)은 프랑스와 일본의 대표적인 중학교 교과서를 하나씩 선정하고 이를 분석하여 두 나라에서 기하학과 증명을 다루는 방법을 비교하였다. 일본 교과서에서는 평행사변형의 성질을 다룰 때 우리나라와 같이 대부분의 명제들을 삼각형의 합동을 통해 증명하는 반면, 프랑스에서는 삼각형의 합동을 가르치지 않는다. 프랑스 교과서에서는 평행사변형의 정의를 '점대칭인 사각형은 평행사변형'으로 도입하여, 점대칭을 통해 평행사변형의 모든 성질들을 정당화한다. 즉, 평행사변형을 이해하는 데에 핵심 아이디어는 점대칭으로, 변환 기하학적 관점에서 사각형의 성질을 지도하고 있음을 알 수 있다.

Usiskin et al(2008)는 교과서에서는 사각형에 대해 한 가지 정의만을 제시하지만, 그 정의와 동치인 다른 정의들도 주어질 수 있다고 하였다. 평행사변형의 정의는 점대칭 사각형과 동치이다. 점대칭도형에서 각 꼭짓점들의 대응점은 마주보는 점이다. 사각형의 경우 대각선의 교점이 대칭의 중심이 된다. 이것은 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분함을 뜻한다. 즉, 점대칭 사각형과 두 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는 사각형은 서로 동치이므로 평행사변형의 정의와도 동치이다.

또한 두 인접하는 변의 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형은 직사각형의 정의와 동치이다. 두 인접하는 변의 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형에서 각 꼭짓점들의 대응점은 그 점과 인접하는 두 점이다. 즉 이들의 대응각이 모두 같다는 것은 사각형의 네 각의 크기가 모두 같다는 것이고, 이는 직사각형의 정의이다. 또한 네 각의 크기가 모두 같은 사각형에서 한 변의 수직이등분선은 그 사각형을 좌우 합동인 두 사각형으로 나누므로 선대칭축이 된다. 즉, 네 각의 크기가 모두 같은 사각형은 두

인접하는 변의 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형이다.

두 대각선에 의한 선대칭 사각형은 마름모의 정의와 동치이다. 두 대각선에 의한 선대칭 사각형에서 각 변들의 대응변은 인접하는 두 변이다. 즉 사각형의 네 변의 길이가 모두 같다는 것이고, 이는 마름모의 정의이다. 또한 네 변의 길이가 모두 같은 사각형에서 한 대각선은 그 사각형을 좌우 합동인 두 이등변삼각형으로 나누므로 선대칭축이 된다. 즉, 네 변의 길이가 모두 같은 사각형은 두 대각선에 의한 선대칭 사각형이다.

두 대각선과 두 인접하는 변의 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형은 정사각형의 정의와 동치이다. 두 대각선에 의한 선대칭으로 사각형의 네 각의 크기가 같고, 두 인접하는 변의 수직이등분선에 의한 선대칭으로 사각형의 네 변의 길이가 같기 때문이다. 이렇듯 현행 교과서에서 다루는 사각형의 정의와 대칭성의 관점에서 사각형의 정의는 동치관계이다.

위의 연구들을 기반으로, 본 연구에서는 사각형의 성질을 정당화하고 포함관계를 탐색하는 한 가지 관점으로 “대칭성”을 선택하였다. 그리고 그 시사점을 학생들이 도형의 성질이 보존된다는 점으로부터 사각형의 성질을 추측해볼 수 있다는 점, 대칭성으로부터 사각형의 포함관계를 추론할 수 있다는 점에 초점을 맞추어 기존의 학습 방법과 비교-도출하였다.

2. 현행 사각형 학습에 대한 고찰

연구 설계에 앞서 2009개정 교육과정의 중학교 2학년 사각형의 성질 단원을 학습 내용과 학습 과정 면에서 나누어 살펴보았다.

먼저 2009 개정 교육과정 수학 성취기준에서 제시하는 사각형의 성질의 성취기준은 다음과 같다.

수95053-1. 평행사변형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.
수95053-2. 정사각형, 직사각형, 마름모, 사다리꼴의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

사각형의 성질 단원에서는 첫째, 평행사변형의 성질을, 둘째, 다양한 사각형의 성질을 이해하고 설명하는 것이 핵심 목표이다.

첫 번째 목표인 평행사변형의 성질은 교과서에서 특별한 범주화 없이 나열되어 그 성질들 사이의 관련성을 찾기 어렵다. 또한 이 성질들은 각각 다른 방법으로 증명, 정당화되고 따로 분리되어 정리된다. 예를 들어 평행사변형의 성질 중 '두 쌍의 대각의 크기는 서로 같다.'는 평행선의 성질에 의하여, '두 쌍의 대변의 길이는 서로 같다.'는 한 대각선에 의해 분할된 두 삼각형의 합동에 의하여, '두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.'는 두 대각선에 의해 분할된 삼각형들 중, 마주보는 두 삼각형의 합동에 의하여 증명된다. 이러한 전개 방식에 따라 교과서에서 평행사변형의 성질들 사이의 관련성은 더욱 모호해 보인다.

두 번째 목표에 대해 교과서에서는 직사각형이 평행사변형의 성질을 모두 만족하는 이유를 다음과 같이 설명한다.

① 두 쌍의 대각의 크기가 각각 같은 사각형은 평행사변형이다.

② 직사각형은 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형이다.

③ 직사각형은 평행사변형이다.

④ 그러므로, 직사각형은 평행사변형의 성질을 모두 만족한다.

①은 평행사변형의 조건으로, 평행선의 성질에 의해 증명을 한다. ②는 직사각형의 정의이다. ③은 ①과 ②, 즉 평행사변형의 조건과 직사각형의 정의에 의해 유도되는 내용이다. 그리고 마지막으로 ③에 의해 ④가 성립함을 설명하고 있다.

이 단원에서 평행사변형의 조건과 다양한 사각형 사이의 관계는 다양한 사각형의 “성질 사이의 관계”를 이해하고 설명하기 위한 도구적 내용이고, 다양한 사각형의 “성질 사이의 관계”가 핵심 내용이다. 즉, 위의 예시에서 단원의 핵심내용에 해당하는 것은 ④이다. 그리고 ④를 이해하기 위해서는 ②는 초등학교에서 이미 학습했으므로, 해당 단원에서 ①과 ③을 학습해야 한다.

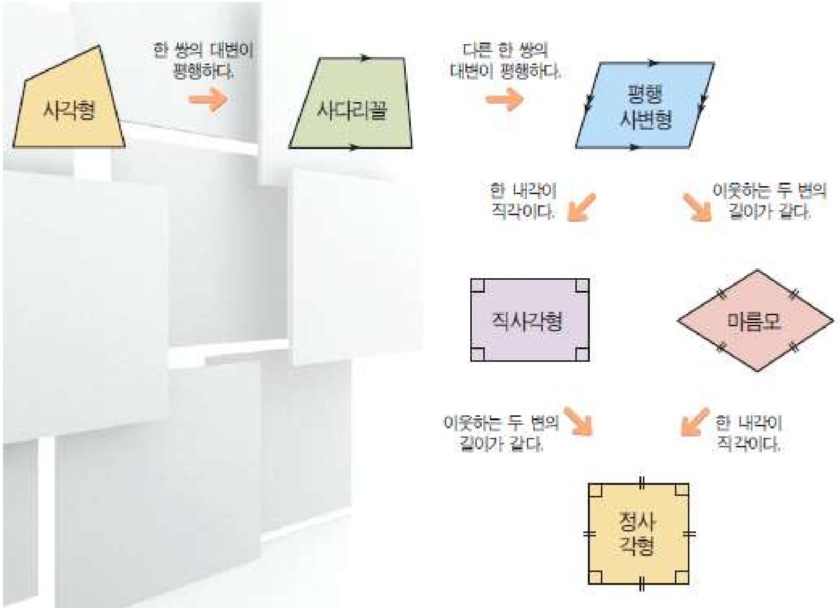
한편, ①와 같은 평행사변형의 조건을 이해하기 위해서는 삼각형의 합동, 평행선의 성질 등을 통한 연역 과정이 선행되어야 한다는 어려움이 있다. 정혜윤, 이경화(2016)는 미국과 우리나라 교과서가 평행사변형의 조건을 어떻게 다루는지 수학 과제를 비교 분석하였다. 우리나라 교과서는 미국에 비해 평행사변형의 성질에서 평행사변형의 조건으로 넘어갈 때, 성질과 조건 사이의 관계 및 각 조건이 제시된 이유가 명확하게 드러나지 않는다고 이들은 지적하였다.

우리나라 교과서에서 평행사변형의 조건에 대한 내용보다 그 활용에 초점을 맞추고 있는 이유 중 하나는 2009 개정 교육과정 수학 성취기준에서 찾을 수 있다. 사각형의 성질 단원에서 핵심 내용은 평행사변형의

조건이 아니라, 이를 통해 다양한 사각형의 성질 사이의 관계를 탐구하는 것이다. 평행사변형의 조건은 다양한 사각형의 성질 사이의 관계로 나아가기 위한 도구적 역할을 하기 때문에, 내용면에서 충분한 학습이 이루어지고 있지 않다.

또한 이규희, 최영기(2016)는 '③ 직사각형은 평행사변형이다.'와 같은 수학적 지식을 효과적으로 의사소통하기 위해서는 직사각형과 평행사변형의 수학적 개념과 함께 일상적 언어 '이다'에 대한 이해가 필요하다고 하였다. 왜냐하면 ①과 ②에서 사용된 '이다'는 '같다'의 의미, 수학적 동치의 개념이 내포되어 있는 반면, ③은 직사각형의 또 다른 이름이 평행사변형이라는 뜻이기 때문이다. 즉, 일상적 언어 '이다'를 잘못 해석하게 되면, "직사각형은 평행사변형이다."라는 문장은 자칫 잘못 이해될 수 있음을 지적하였다.

도종훈(2006)은 사각형들의 포함 관계를 이해할 때, [그림 1]과 같이 교과서에 정의된 사각형의 정의가 사다리꼴과 평행사변형은 변들 간의 "평행"여부를 통해 정의되는 반면, 직사각형과 마름모는 "각"과 변의 "길이"를 통해 결정되는 형식을 취하게 되어 학생들의 어려움을 자아낸다고 지적하였다.



[그림 Ⅲ.1] 중학교2 교과서(류희찬 외): 여러 가지 사각형의 관계

위를 통해 분석한 사각형의 성질의 내용 측면에서 학습상의 어려움을 정리하면 다음과 같다. 첫째, 주어진 사각형의 성질들이 범주화 없이 나열되어 그 성질들 사이의 관련성을 찾기 어렵다. 둘째, 평행사변형의 조건은 내용면에서 충분한 학습이 이루어지고 있지 않아 평행사변형의 성질과의 관계 및 각 조건이 제시된 이유가 명확하지 않다. 셋째, '직사각형은 평행사변형이다.'와 같은 문장에서 '이다'를 해석하는 데에 어려움이 따를 수 있다. 넷째, 통일되지 않은 관점의 사각형의 정의로 사각형들을 분류하여 학습의 자연스러운 이해가 어렵다.

다음으로 교과서에서 제시하고 있는 사각형 성질의 학습 과정에 대해 분석하고자 한다.

교과서에서는 지면의 한계로, 특정 사각형에 대한 표준화된 이미지를 주로 제시하고 있다. Monaghan(2000)는 학생들이 직사각형은 가로의 길이가 세로보다 긴 사각형, 평행사변형은 양 옆의 변이 비스듬한 사각형

으로 주로 설명하는 등 도형의 표준화된 이미지에 고착되어 있음을 실험을 통해 관찰하였다. 예를 들어, 대부분의 학생들은 평행사변형을 묘사하라는 문제에서 [그림 Ⅲ.3]보다 [그림 Ⅲ.2]와 같은 표준 방향의 평행사변형으로 답하였다. 우리나라 교과서에서도 평행사변형, 직사각형, 마름모, 정사각형의 각각 표준화된 이미지가 주로 제시되고 있으며, 이들은 학생들의 개념 이미지를 혼란시킬 수 있다. 예를 들면, 직사각형을 가로의 길이가 세로보다 긴 사각형으로 인식하는 것은 직사각형의 네 변의 길이가 같을 수 있음을 이해하는 데에 장애가 될 수 있다.

[그림 Ⅲ.2] Monaghan(2000):
표준 방향의 평행사변형

[그림 Ⅲ.3] Monaghan(2000):
비표준 방향의 평행사변형

또한 교과서에서 여러 가지 사각형의 성질을 정의로부터 연역하는 과정을 표로 정리하면 다음과 같다.

<표 Ⅲ.6> 교과서에서 사각형의 정의로부터 성질을 연역하는 과정

<table>
<tr><th></th><th>정의</th><th>관계</th><th>사각형의 성질</th></tr>
<tr><td>평행사변형</td><td>두 쌍의 대변이 평행한 사각형</td><td>(추측)
평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이와 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같음을 추측할 수 있다.</td><td>① 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.
② 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.
③ 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">직사각형</td><td rowspan="2">네 내각의 크기가 모두 같은 사각형</td><td>(평행사변형의 조건)
직사각형은 평행사변형이고 평행사변형의 성질을 모두 만족한다.</td><td>① 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다.
② 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.</td></tr>
<tr><td>(추측)
직사각형의 두 대각선의 길이가 서로 같음을 추측할 수 있다.</td><td>③ 두 대각선은 길이가 서로 같다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">마름모</td><td rowspan="2">네 변의 길이가 모두 같은 사각형</td><td>(평행사변형의 조건)
마름모는 평행사변형이고 평행사변형의 성질을 모두 만족한다.</td><td>① 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.
② 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.</td></tr>
<tr><td>(추측)
마름모의 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분함을 추측할 수 있다.</td><td>③ 두 대각선은 수직으로 만난다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">정사각형</td><td rowspan="2">네 변의 길이가 모두 같고, 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형</td><td>(사각형의 정의)
정사각형은 마름모이고, 마름모의 성질을 모두 만족한다.</td><td>① 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.</td></tr>
<tr><td>(사각형의 정의)
정사각형은 직사각형이고 직사각형의 성질을 모두 만족한다.</td><td>② 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.</td></tr>
</table>

평행사변형의 성질과 같은 경우, 교과서의 추측을 통해 결론이 먼저 제시된다. 그리고 그 성질들은 평행사변형의 정의로부터 어떻게 발견된 것인지 알 수 없다. 평행사변형의 정의와 그 성질은 교과서의 추측으로 연결될 뿐 직접적인 연결성을 파악하기 쉽지 않다.

직사각형과 마름모는 평행사변형의 조건에 의해 평행사변형이므로 성립하는 성질과 교과서의 추측을 통해 제시되는 성질로 나뉜다. 직사각형의 성질 중 '두 대각선의 길이가 서로 같다.'의 경우 직사각형의 정의로부터 연역하여 제시되는 것이 아니라 교과서의 추측을 통해 제시되기 때문에 이 역시 어떻게 그 추측을 할 수 있는지에 대한 과정 설명이 부족하다. 또한 그 성질 외에 다른 성질을 추측할 수 없는지도 불분명하다.

정사각형의 성질은 그 정의에 따라 정사각형이 마름모와 직사각형의 성질을 만족함을 설명하고 있지만, 그 외에 정사각형만이 갖는 성질이 있는지에 대한 탐구는 이루어지지 않는다. 직사각형이 평행사변형의 성질 외에 두 대각선의 길이가 같다는 성질을 갖고 있으므로, 정사각형도 정사각형만이 갖는 성질이 있지 않을까 생각하는 것이 자연스러울 수 있다. 그러나 교과서는 사각형의 성질에 대한 결론을 먼저 제시하여, 학생들이 스스로 이를 탐구, 발견할 기회를 제공하고 있지 않다.

이상으로 사각형 성질 탐구 학습 과정상의 어려움은 도형을 교과서에 그려진 대로 정적으로 학습한다는 점, 사각형의 정의로부터 성질을 연역하는 과정에 대한 설명이 부족하다는 점으로 정리할 수 있다.

반면 사각형의 대칭성으로 직사각형이 평행사변형의 성질을 모두 만족함을 설명하면 다음과 같다.

① 평행사변형은 점대칭 사각형이다.

② 직사각형은 점대칭이고 두 인접하는 변의 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형이다.

③ 직사각형은 점대칭 사각형의 성질, 즉 평행사변형의 성질을 모두 만족한다.

평행사변형의 대칭성과 직사각형의 대칭성을 발견할 수 있다면, 평행사변형의 대칭성, 즉 점대칭으로 연역되는 성질들을 직사각형 역시 만족함을 이해할 수 있다. 또, 학생들은 평행사변형의 성질 외에 직사각형만 가지는 성질을 탐구하기 위해서는 직사각형의 선대칭을 탐구해야 함을 추론할 수 있다. 이어서 도형의 대칭성을 통해 여러 가지 사각형들의 성질의 관계를 파악할 수 있다. 예를 들어 직사각형의 성질들 중에 평행사변형의 성질들이 있음을 알고, 직사각형이 평행사변형의 성질을 모두 만족함을 알 수 있다. 이로써 다양한 사각형의 포함관계를 추론할 수 있다. 이러한 과정을 여러 가지 사각형에 대해 표로 정리하면 <표 Ⅲ.7>과 같다.

<표 Ⅲ.7> 사각형의 대칭성으로부터 성질을 연역하는 과정

	정의	대칭성	성질 내용
평행사변형	두 쌍의 대변이 평행한 사각형	점대칭 사각형	① 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다. ② 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다. ③ 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
직사각형	네 내각의 크기가 모두 같은 사각형	점대칭 사각형	① 두 쌍의 대변의 길이는 각각 같다. ② 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
		두 인접하는 변의 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형	③ 두 대각선은 길이가 서로 같다.
마름모	네 변의 길이가 모두 같은 사각형	점대칭 사각형	① 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다. ② 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.
		두 대각선에 의한 선대칭 사각형	③ 두 대각선은 수직으로 만난다.
정사각형	네 변의 길이가 모두 같고, 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형	두 대각선에 의한 선대칭 사각형	① 두 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분한다.
		두 인접하는 변의 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형	② 두 대각선은 길이가 서로 같고, 서로 다른 것을 이등분한다.

각 사각형들의 성질은 사각형의 선대칭 또는 점대칭의 성질에 의해 모두 연역된다. 즉, 대칭도형에서 대응변의 길이, 대응각의 크기 그리고 대칭의 중심 또는 대칭축과 대응점을 이은 선분 사이의 관계로 사각형의

성질을 이끌어낼 수 있다. 그리고 각 사각형의 성질은 분리 이해되는 것이 아니라 대칭성이라는 관점에서 연결됨을 알 수 있다.

또한 각 사각형의 대칭성을 발견하기 위해 학생들이 직접 만든 사각형을 동적으로 조작하는 활동은, 자와 컴퍼스로 도형을 작도하거나 책에 그려진 도형을 학습하는 활동의 한계에서 벗어나, 도형의 다양한 표현 이미지를 경험할 수 있다는 데에서 큰 장점이 있다. 특히, 주어진 도형의 대칭변환에 의한 대칭관계를 직접 포개고 겹쳐보며 확인하게 하는 활동은 기하학습의 형식적 측면을 덜어주고, 기하 대상에 친숙하게 한다.

이상의 내용을 기존 교과서 내용과 접근 방법을 비교하면 다음 표와 같다.

<표 Ⅲ.8> 현행 교과서와 변환 기하학적 접근 방법 비교

	현행 교과서의 접근	변환 기하적 접근
사각형의 정의	정사각형 : 모든 변의 길이가 같고 모든 각이 직각인 사각형 직사각형 : 모든 각이 직각인 사각형 마름모 : 모든 변의 길이가 같은 사각형 평행사변형 : 마주보는 변의 길이와 각의 크기가 각각 같은 사각형	정사각형 : 두 대각선과 두 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형 직사각형 : 두 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형 마름모 : 두 대각선에 의한 선대칭 사각형 평행사변형 : 점대칭 사각형
사각형의 성질 제시 방식	사각형의 정의로부터 교과서의 추측 등을 통해 성질들을 나열함. 사각형의 성질들이 각각 분리되어 따로 학습됨.	사각형의 대칭성으로부터 다른 성질들을 연역함. 사각형의 성질들은 대칭의 성질로 연결됨.
사각형의 성질 정당화 방법	삼각형의 합동, 평행선의 성질 등으로 증명함.	대칭변환에 대한 대칭 관계를 직관적으로 파악함.
여러 가지 사각형 성질의 관계	평행사변형의 조건, 사각형의 정의로 설명함.	사각형의 대칭성으로 설명함.
도형 접근 방식	정적 접근	동적 접근

사각형의 성질을 학습하는 데에 앞서, 그 대칭성을 탐구하고 대칭성을 통해 성질을 연역한다면 다음과 같은 장점이 있다. 먼저 학습 내용 면에서 첫째, 각 사각형의 성질들이 대칭성으로 연결된다. 둘째, 여러 가지 사각형의 관계와 평행사변형의 조건에 대한 내용학습 없이 초등학교에서 배운 대칭에 대한 내용으로 사각형의 성질을 학습할 수 있다. 셋째, 여러 가지 사각형의 대칭성으로 사각형의 관계를 추론해낼 수 있다. 그리고 학습 과정 면에서는 첫째, 반사, 회전을 직접 조작하며 도형을 동적으로 탐구할 수 있다. 둘째, 일관된 방법으로 사각형의 성질을 직관적으로 연역할 수 있다.

Ⅳ. 연구 방법 및 결과

1. 연구 설계

본 연구는 서울대학교 생명윤리위원회(SNU IRB)의 승인을 받아 진행되었다. 연구 설계 목적은 중학교 기하교육과정에서 구체적 조작 활동을 통한 직관적인 이해를 위해 변환 기하학적 관점을 도입하는 것이다. 그 한 예시로서 중학교 2학년 ‘사각형의 성질’을 사각형의 대칭성을 통해 연역하는 수업을 전개하였다. 이를 통해 대칭성을 이용한 사각형 학습 가능성을 확인하고, 학습 과정에서 나타난 어려움을 자세히 살펴보고자 하였다.

1.1. 연구 내용

본 연구에서 실험한 수업은 사각형의 대칭성으로부터 학습 성취 기준 내용을 탐구하는 것에 중점을 두었다. 예를 들어, ‘직사각형은 평행사변형이다.’와 같이 사각형의 위계구조로부터 직사각형의 성질을 도출하는 것이 아니라, 대칭성으로부터 사각형의 모든 성질을 연역하는 것이 학습의 핵심이었다. 더불어 여러 가지 사각형의 성질을 비교하여, 결과적으로 ‘직사각형은 평행사변형의 성질을 모두 만족한다.’라는 학습 목표 내용에 도달하기를 기대하였다.

기존의 사각형 학습 과정과 대칭성을 이용한 사각형 학습 과정을 비교하면 <표 Ⅳ.1>과 같다. 본 연구에서는 사각형 단원의 학습 목표인 ‘평행사변형 및 정사각형, 직사각형, 마름모의 성질을 이해하고 설명할

수 있다.’를 각 사각형의 대칭변환을 탐구하며 동적으로 접근하였다.

<표 Ⅳ.1> 기존의 사각형 학습 과정과 대칭성을 이용한 사각형 학습 과정 비교

평행사변형의 조건	마름모, 직사각형의 정의	마름모, 직사각형의 성질		관계
두 쌍의 대각의 크기가 같으면 평행사변형이다. 두 쌍의 대변의 길이가 같으면 평행사변형이다.	직사각형은 네 각의 크기가 같다. 마름모는 네 변의 길이가 같다.	따라서 마름모, 직사각형은 평행사변형이고, 평행사변형의 성질을 모두 만족한다.	직사각형의 대각선의 길이가 같음을 추측할 수 있다. 마름모의 대각선은 서로 다른 것을 수직이등분함을 추측할 수 있다.	평행사변형의 한 내각이 직각이면 직사각형이다. 평행사변형의 이웃하는 두 변의 길이가 같으면 마름모이다.

평행사변형의 대칭성	마름모, 직사각형의 대칭성	마름모, 직사각형의 성질		관계
평행사변형은 점대칭 사각형이다.	직사각형은 점대칭이고 두 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형이다. 마름모는 점대칭이고 두 대각선에 의한 선대칭 사각형이다.	마름모, 직사각형의 점대칭 성질에 의해 평행사변형의 성질을 모두 만족함을 알 수 있다.	직사각형의 선대칭 성질에 의해 두 대각선의 길이가 같음을 발견한다. 마름모의 선대칭 성질에 의해 두 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분함을 발견한다.	직사각형은 점대칭사각형이므로 평행사변형에 포함된다. 마름모는 점대칭 사각형이므로 평행사변형에 포함된다.

1.2. 연구의 대상 및 방법

수업실험은 서울 D중학교 수학동아리에 소속된 3학년 학생 5명을 대상으로 실시하였다. 본 동아리는 다양한 수학 관련 활동을 통해 수학적 경험과 가치를 공유하며 수학에 대한 인식을 새롭게 할 수 있는 기회를 제공하는 데에 목적을 두고 있다. 따라서 교과서에서 정적으로 다루었던 도형을 대칭변환을 통해 동적으로 고찰하는 본 연구의 활동은 학생들이 같은 수학적 대상을 새롭게 인식하게 할 수 있다는 점에서 동아리의 활동 내용 및 취지에 부합된다고 볼 수 있다.

동아리에 속한 중3 학생 5명의 수학 성취 수준은 학교 내신 기준으로 상 수준 1명, 중 수준 2명, 하 수준 2명이었다. 위 학생들은 올해 3월 초 수학동아리에 자발적으로 지원한 학생들로, 수학 관련 활동에 대한 열의와 의욕을 가지고 있다. 중학교 3학년을 연구대상으로 선정한 이유는 대칭성을 이용한 정당화 방법을 기존의 정당화 방법과 비교조사하기 위해서이다. 그러나 중학교 3학년은 이미 사각형에 대해 배웠기 때문에, 수업실험에서 학생들이 사각형의 성질과 그 관계를 스스로 추측했다고 해서 이것을 '대칭성' 학습의 효과라고 보기 어려울 수 있다. 이러한 제한점을 극복하기 위해, 본 수업실험에서는 학생들의 추측에 이유를 물어, '대칭성'으로 추론한 것이 맞는지를 재확인하였다.

본 연구의 실험에서는 본 연구자가 교사로서 직접 학생들을 지도하였다. 수업은 '대칭성을 이용한 사각형의 성질 탐구'를 주제로 3차시(135분) 분량으로 진행되었다. 수업의 개요는 <표 Ⅳ.2>와 같다. 1차시에서 먼저 초등학교 5학년에서 학습한 선대칭도형과 점대칭도형의 정의 그리고 성질을 복습한다. 그리고 A4 사이즈의 색지를 이용하여 각자 평행사변형, 직사각형, 마름모 모양을 만든다. 만드는 방법은 임의의 폭이 같은 사각띠 2개와 이들과 폭이 다른 사각띠 1개를 가지고, 사각띠들을 임의의 각

도로 겹쳐서 겹쳐진 모양대로 오리는 방법을 택하였다. 사각띠의 폭과 이들을 겹칠 때의 각도는 학생마다 임의로 택하는 것이므로 임의의 사각형에 대해 대칭성을 탐구할 수 있었다. 2차시에서는 전 차시에서 탐구한 사각형의 대칭성을 바탕으로 사각형의 성질을 연역한다. 마지막 3차시에서는 사각형의 성질의 관계 및 위계구조 등에 대한 설문에 응답한다.

<표 Ⅳ.2> 수업 개요

수업 단계	수업 내용
1차시 (60분)	선대칭도형과 점대칭도형 복습 여러 가지 사각형의 대칭성 탐구
2차시 (35분)	여러 가지 사각형의 성질 연역
3차시 (40분)	설문 응답

수업 분석 자료는 학생들의 개별 활동지(<부록>)와 더불어 수업 전체 내용이 녹화된 비디오 파일 등이다.

2. 자료 수집 및 분석

이 절에서는 5명의 중학교 3학년 학생들(학생 A, B, C, D, E)을 대상으로 사각형의 대칭성을 탐구한 교수 실험의 내용을 상세하게 살펴본다.

2.1. 사각형의 대칭성 발견

사각형의 대칭성을 탐구하기에 앞서, 사각형이 아닌 다양한 도형의 대칭성을 탐구하였다. 주어진 도형이 대칭도형인지 판단하고, 대칭도형이라면 그 도형 요소들의 대칭관계를 찾아보며 초등학교에서 배운 대칭도형의 성질을 다음과 같이 재정리하였다.

선대칭 도형의 성질

① 대응변의 길이는 서로 같다.

② 대응각의 크기는 서로 같다.

③ 대응점을 이은 선분은 대칭축과 수직으로 만난다.

점대칭 도형의 성질

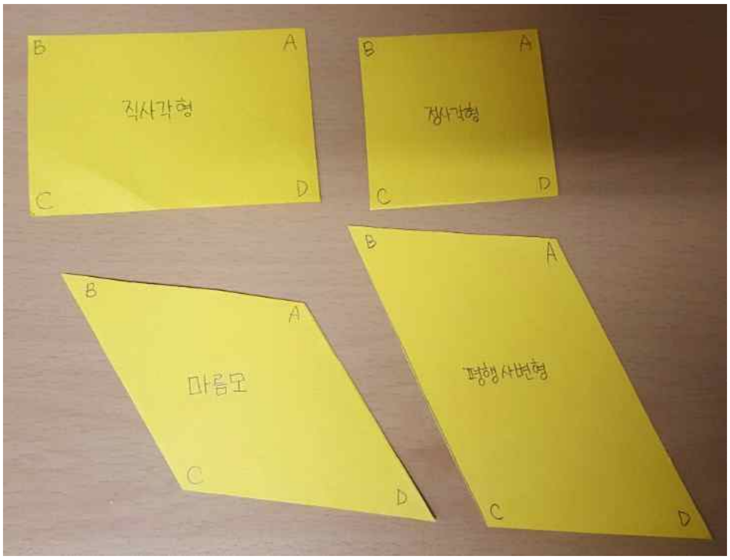
⑴ 대응변의 길이는 서로 같다.

⑵ 대응각의 크기는 서로 같다.

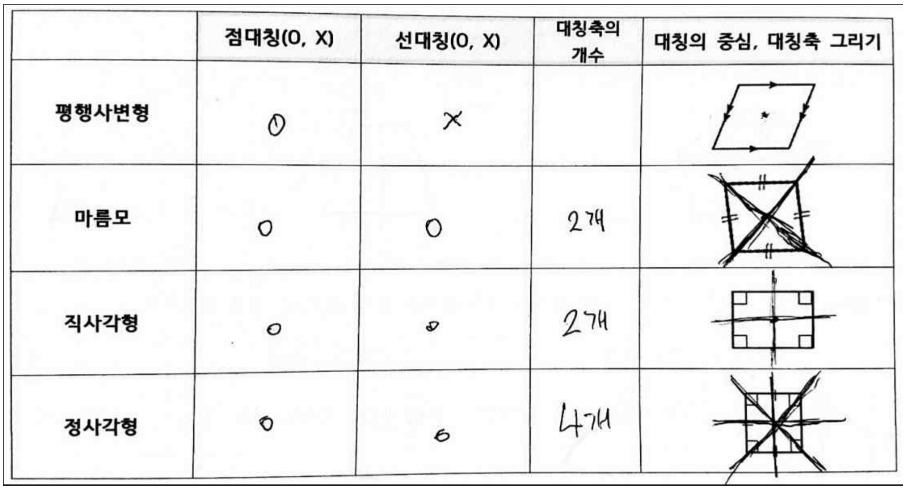
⑶ 대칭의 중심은 대응점을 이은 선분을 이등분한다.

그 후 학생들은 각자가 종이로 만든 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형을 조작하며 대칭성을 스스로 판단해보았다. 5명의 학생 모두 사각형의 대칭성을 판단하고 대칭축의 개수를 헤아리는 문제를 맞혔으나, 그 중 한 학생은 마름모의 대칭축을 잘못 그렸다. 그러나 대부분의 학생

들이 초등에서 배운 내용을 토대로 스스로 사각형의 대칭성을 발견하는 데에 큰 무리가 없음을 알 수 있었다.



[그림 Ⅳ.1] 여러 가지 사각형 모양



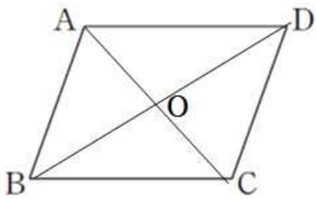
	점대칭(O, X)	선대칭(O, X)	대칭축의 개수	대칭의 중심, 대칭축 그리기
평행사변형	O	X		
마름모	O	O	2개	
직사각형	O	O	2개	
정사각형	O	O	4개	

[그림 Ⅳ.2] 학생 C의 답안: 여러 가지 사각형의 대칭성

2.2. 대칭성을 이용한 사각형의 성질 연역

본 연구자는 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형 중 점대칭 사각형이 무엇인지, 대각선에 의한 선대칭 사각형이 무엇인지를 묻는 문항을 통해 학생들에게 사각형의 대칭성의 차이를 다시 상기시켰다. 그런 다음 앞서 정리한 대칭도형이 갖는 성질을, 사각형 또한 대칭도형이기에 갖게 된다고 설명하였다. 그리고 그 대칭도형의 성질을 그 사각형의 고유한 성질로서 다시 문장을 다듬어 정리할 것이라고 하였다.

학생들이 사각형의 성질을 대칭성을 이용해 연역하는 과정은 [그림 Ⅳ.3], <표 Ⅳ.3>과 같다. 평행사변형의 경우, 이미 알고 있는 평행사변형의 대칭성, 점대칭으로부터 시작한다. 먼저 평행사변형이 점대칭도형이기 때문에 대칭관계가 성립하는 각의 크기, 변의 길이 등을 발견하고 활동지의 빈칸을 채운다. 그리고 그것이 대칭관계임을 설명하는 대칭의 성질에 해당하는 번호를 쓴다. 그 다음은 발견한 대칭관계를 연구자와 함께 사각형의 성질로 재정리하였다.

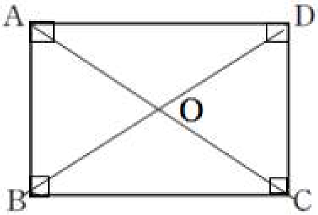


[그림 Ⅳ.3] 활동지:
평행사변형

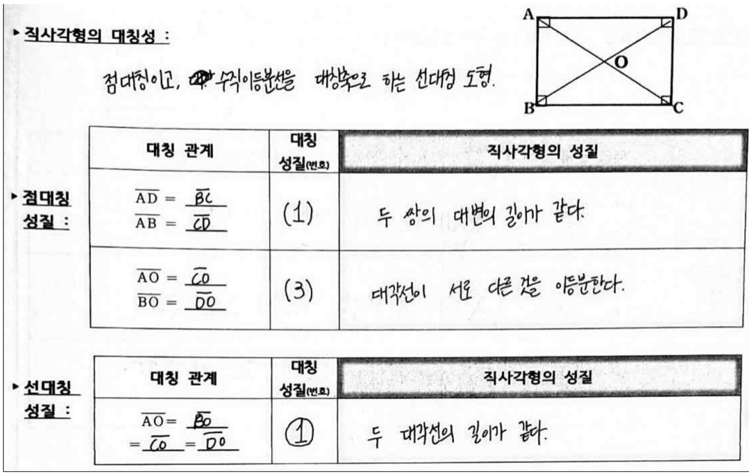
<표 Ⅳ.3> 대칭성으로부터 사각형의 성질 연역 과정

평행사변형의 대칭성	대칭관계	대칭의 성질	평행사변형의 성질
점대칭도형	$\overline{AD} = \overline{CB}$ $\overline{AB} = \overline{CD}$	(1) 대응변의 길이가 같다.	두 쌍의 대변의 길이가 같다.
	$\angle A = \angle C$ $\angle B = \angle D$	(2) 대응각의 크기가 같다.	두 쌍의 대각의 크기가 같다.
	$\overline{AO} = \overline{CO}$ $\overline{BO} = \overline{DO}$	(3) 대칭의 중심은 대응점을 이은 선분을 이등분한다.	대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.

대칭관계를 탐구함에 있어, 학생들이 빈칸을 채우기 때문에 사각형 그림을 힌트로 탐구한 것인지, 대칭도형의 성질을 바탕으로 탐구한 것인지 불분명할 수 있다. 이에 본 연구는 점대칭도형의 성질을 괄호번호로, 선대칭도형의 성질을 동그라미번호로 구분표시하고, 학생들에게 발견한 대칭관계마다 해당 대칭도형의 성질 번호를 적게 하였다. 예를 들어 [그림 Ⅳ.4]의 직사각형의 경우, 점대칭도형의 성질에 의해 $\overline{AO}$와 대칭관계인 변은 $\overline{CO}$ 이고 선대칭도형의 성질에 의해 대칭관계인 변은 $\overline{BO}$와 $\overline{DO}$이다. 즉, 어떤 대칭으로 탐구하였느냐에 따라 성립하는 대칭관계가 다르다([그림 Ⅳ.5]).



[그림 Ⅳ.4] 활동지:
직사각형



▸ 직사각형의 대칭성 :

점대칭이고, 수직이등분선을 대칭축으로 하는 선대칭 도형.

▸ 점대칭 성질 :

대칭 관계	대칭 성질(번호)	직사각형의 성질
$\overline{AD}$ = $\overline{BC}$ $\overline{AB}$ = $\overline{CD}$	(1)	두 쌍의 대변의 길이가 같다.
$\overline{AO}$ = $\overline{CO}$ $\overline{BO}$ = $\overline{DO}$	(3)	대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.

▸ 선대칭 성질 :

대칭 관계	대칭 성질(번호)	직사각형의 성질
$\overline{AO}$= $\overline{BO}$ = $\overline{CO}$ = $\overline{DO}$	①	두 대각선의 길이가 같다.

[그림 Ⅳ.5] 학생 D의 답안: 직사각형의 대칭성과 성질

본 연구자는 주어진 표의 빈칸에 해당하는 내용을 학생들이 돌아가면서 발표하게 하였다. 다음은 학생이 직사각형의 대칭에 의한 대칭관계를 통해 직사각형의 성질을 정리하는 장면이다.

연구자: 직사각형의 대칭성을 보고 표의 흰색 빈칸을 채워주세요.
선분AB랑 같은 것은? 선분AD랑 같은 것은?
학생E: 선분CD랑 선분CB입니다.
연구자: <u>대칭 성질</u> 몇 번째?
학생E: 괄호 1번
연구자: 그럼 성질은 뭐라고 정리할 수 있을까? E야? 그림에서 확인해 보면? 선분AB랑 선분CD길이 같고, 선분AD랑 선분CB길이 같으니까…
학생E: <u>두 쌍의 대변의 길이가 같다.</u>
연구자: 그렇지.
그다음, 선분AO랑 같은 것은? 선분BO랑은?
학생A: 선분CO랑 선분DO.
연구자: <u>대칭 성질</u> 몇 번째?
학생A: 괄호 3번

연구자: 그럼 성질 뭐라고 쓸 수 있지?

학생A: <u>대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.</u>

연구자: 그렇지. 이것은, 앞의 어떤 사각형의 성질과 겹치니?

다같이 마름모..랑 평행사변형이요.

연구자: 그런데 우리가 사각형의 대칭성을 봤을 때, 직사각형, 마름모, 평행사변형을 보면, <u>직사각형만 특별히 가지고 있는 대칭</u>이 있잖아. 그게 뭐지?

학생A, B: 선대칭. 수직이등분선에 대한 선대칭이요.

연구자: 그럼 이것을 가지고 우리가 성질을 탐구한 것은, <u>직사각형만 가지고 있는 성질</u>이겠네?

연구자: 자, 그럼 선분AO랑 같은 것은?

학생B: 선분BO, 선분CO, 선분DO.

연구자: 대칭 성질 번호는?

학생B: 동그라미 1번.

연구자: 그럼 이 경우는, 대각선의 길이가 서로 같다. 라고 쓸 수 있겠지. 그리고 이게 바로 직사각형만의 특별한 성질이 되겠지.

위와 같이 대칭성을 이용하여 사각형들의 성질을 정리한 후, 각 사각형들을 비교하며 공통점과 차이점을 이끌어낼 수 있었다. 직사각형의 성질 중 점대칭도형의 성질로 연역된 것은 평행사변형, 마름모와 같고 선대칭도형의 성질로 연역된 것은 직사각형만이 갖는 특별한 성질이 된다.

본 수업실험을 통해 교과서에서 다루는 사각형의 성질을 학생들이 모두 대칭성으로부터 연역할 수 있음을 확인할 수 있었다. 그러나 3차시라는 시간적 제약이 있었기에, 대칭도형의 대칭관계를 정리함에 있어 표의 빈칸을 채우는 형식을 따랐다. 그러나 시간적 여유가 있다면, 학생들이 보다 자유롭게 도형의 성질을 탐구하며 교과서에 없는 사각형의 성질도 발견할 기회를 제공할 수 있을 것이다. 예를 들어, 마름모의 선대칭 성질로부터 '대각선은 각 각을 이등분한다.'를 이끌어낼 수 있다.

2.3. 사각형의 성질들의 관계 이해

평행사변형, 마름모, 직사각형의 성질들을 대칭성을 통해 알아본 후 그것을 비교하는 문항과 정사각형의 성질을 추측하는 문항은 각자 해결해보도록 하였다.

마름모와 직사각형이 평행사변형의 성질을 모두 만족하는지 그렇다면 이유는 무엇인지 서술하는 문항①에 대한 답변은 다음과 같다. 5명 중 4명은 마름모와 직사각형이 평행사변형의 성질을 모두 만족한다고 하였으며, 앞서 정리한 각 사각형들의 성질을 비교하거나(3명), 마름모와 직사각형의 대칭성으로(1명) 이를 설명하였다. 나머지 1명은 '마름모는 평행사변형의 성질을 모두 만족한다. 왜냐하면 둘 다 점대칭사각형이기 때문이다. 직사각형은 평행사변형의 성질을 모두 만족하지 않는다. 왜냐하면 직사각형은 점대칭도형이 될 수 있고 선대칭도형이 될 수도 있기 때문이다.'라고 답변하여 개념에 혼란을 갖고 있었다.

정사각형은 어떤 성질을 만족하는지 묻는 문항②에 5명 학생 모두 평행사변형, 직사각형, 마름모의 성질을 다 만족한다고 답했다. 그 중에서도 4명은 구체적으로 두 쌍의 대각의 크기가 같고, 두 쌍의 대변의 길이가 같으며, 대각선은 그 길이가 같고 서로 다른 것을 수직이등분한다고 답하였다.

학생들은 대부분 앞서 탐구한 사각형의 성질들을 바탕으로 그 성질들 사이의 관계를 이해하는 데에 어려움을 느끼지 않았다. 마름모와 직사각형이 평행사변형의 성질을 모두 만족한다는 것을 각 사각형의 성질을 비교하거나 대칭성을 이용하여 이해하였다. 뿐만 아니라 정사각형의 성질을 잘 유추한 것으로 보아, 대칭성을 이용하여 이끌어낸 사각형의 성질들을 바탕으로 그 성질들 사이의 관계를 잘 파악할 수 있음을 확인할 수 있었다(<표 Ⅳ.4>).

<표 Ⅳ.4> 학생 답안: 사각형의 성질들의 관계

학생A의 답변	문항①	네. 마름모와 평행사변형 둘다 점대칭사각형이기 때문이다.
	문항②	아니요. 평행사변형은 점대칭도형이지만 직사각형은 점대칭도형이 될수 있고 선대칭도형도 될 수 있기 때문에 모두 만족하지는 않는다.
학생B의 답변	문항①	모두 만족한다. / 평행사변형의 성질은 두 쌍의 길이. 각이 같고 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는데 마름모도 그렇기 때문..
	문항②	모두 만족한다/ 평행사변형의 성질은 두 쌍의 길이, 각이 같고 대각선이 서로 다른 것을 이등분하는데 직사각형도 마찬가지이기 때문.

2.4. 사각형의 포함관계 추론

사후 설문으로 대칭성을 이용하여 사각형의 포함관계를 설명하는 문항을 제시하였다. 이를 테면 '마름모는 점대칭사각형이고 대각선에 의한 선대칭 사각형이다. 따라서 마름모는 점대칭사각형인 평행사변형에 포함된다.'와 같이 대칭성을 통해 사각형의 포함관계를 추론할 수 있는가를 묻고자 하였다. 이러한 사고과정은 '정사각형은 네 변의 길이가 모두 같고, 네 내각의 크기가 모두 같은 사각형이다. 따라서 정사각형은 네 변의 길이가 같으므로 마름모이다.'라는 교과서의 설명과정과 맥락이 비슷하다.

설문 문항에서 등장하는 "포함"은 본 실험대상인 중학생들에게 수학적 용어로 학습되지 않았기 때문에, 일상용어의 뜻으로 사용되었다. 이규희, 최영기(2016)는 교과서의 '마름모는 평행사변형이다.'에서 "이다"의 의미에 대한 이해의 어려움을 지적한 바 있다. 이때의 "이다"는 동일성

개념이 아닌 유개념 함축의 의미이므로 이를 보다 명확히 드러내기 위해 본 실험 문항에서는 “포함”이라는 용어를 도입하였다.

설문은 먼저 사각형에 대한 내용적 접근을 하지 않고, 조건을 만족하는 집합들의 포함관계에 대해 형식적으로 접근하였다. 주어진 조건 ①, ②, ③을 만족하는 그룹A와 조건 ①, ②, ③, ④를 만족하는 그룹B의 포함관계에 대한 것, 그리고 마름모와 평행사변형의 포함관계를 대칭성으로 설명하는 것으로 2문항을 제시하였다.

첫 번째 문항에서 그룹A와 그룹B의 포함관계를 맞힌 학생은 5명 중 3명이었다. 그 이유로 ‘그룹B는 만족할 수 있는 범위가 좁은데 A는 더 넓은 범위이기 때문에 B가 A에 포함된다.’, ‘B는 A보다 특성이 한 가지 더 많고, A는 B의 특성 중 한 가지가 없다.’, ‘A는 ④를 만족하지 않아 B가 될 수 없는데 B는 ①, ②, ③을 만족하여서 A가 될 수 있다.’라고 각각 설명하였다. 3명 학생들 모두 A와 B의 포함관계는 알맞게 답했지만, 그 이유를 제대로 설명하지 못했다. 나머지 2명은 ‘그룹A에는 ④가 포함되지 않기 때문에 A는 B에 포함된다.’, ‘B는 ④를 만족하기 때문에 ④를 만족하지 않는 A에 포함될 수 없다.’라고 답하였다. 만족해야 하는 조건의 수가 많은 그룹일수록 그 집합이 크다고 생각하여 오류가 나타남을 알 수 있다.

두 번째 문항은 앞 문항의 답을 활용하여 ‘마름모가 평행사변형에 포함된다.’를 설명하는 것으로 5명 중 4명이 알맞게 답하였다. 그리고 그 이유를 사각형의 정의(1명), 사각형의 성질 사이의 포함관계(1명), 사각형의 대칭성 사이의 포함관계(2명)로 설명하였다. 옳은 답변은 ‘마름모는 평행사변형과 마찬가지로 대변이 평행하기 때문이다.’, ‘마름모는 평행사변형의 성질과 더불어 대각선이 서로 다른 것을 수직이등분해야 하므로 더 넓은 범위인 평행사변형에 마름모가 포함된다.’, ‘마름모가 점대칭도형

이기 때문에 평행사변형에 포함된다.’ ‘마름모는 점대칭도형이고 대각선에 의한 선대칭도형이며, 평행사변형은 점대칭도형이다.’가 있었다. 틀린 답변은 ‘마름모의 성질이 평행사변형의 성질에 포함된다.’로 사각형의 성질과 사각형의 포함관계를 연결 짓지 못하였다.

첫 번째 문항과 두 번째 문항에 대한 답변을 분석한 결과, 두 문항을 연관 지어 답을 쓰지 못한 학생이 대부분이었다. 실험대상인 중학생들은 아직 집합과 포함관계에 대한 학습이 이루어지지 않아 도형의 성질과 도형의 포함관계를 연결 짓는 데에 한계가 있을 수 있다. 본 실험설문에서는 이를 “포함”이라는 일상용어를 대체 사용하여 극복하고자 하였으나 이 역시 여전히 학생들에게 이해의 어려움이 있었음을 알 수 있었다.

3. 연구 결과

본 연구실험의 목적은 대칭성을 이용한 사각형 탐구 학습의 가능성을 확인하고, 학습 과정에서 나타난 어려움을 자세히 살펴보고자 하는 것이었다. 수업실험 내용을 바탕으로 내린 연구 결과를 과정 순으로 요약하면 다음과 같다.

첫째, 직접 만든 임의의 각과 임의의 길이를 가진 사각형을 이용하여 각 사각형의 대칭성을 발견할 수 있었다. 초등학습에서는 점대칭도형과 선대칭도형을 따로 분리 학습했다면, 이번 학습에서는 한 도형의 모든 대칭성을 통합 정리하였다. 이것은 사각형의 대칭변환을 모두 찾아내는 것으로, 각 사각형의 변환군에 대한 학습이 된다. 각 도형의 변환군을 찾고 비교하는 과정은 기하학습을 보다 동적이게 하고 스스로 탐구하는 기회를 제공한다. 또한 이를 통해 교과서에서 다루는 사각형의 표준화된 이미지 학습의 한계에서 벗어날 수 있다.

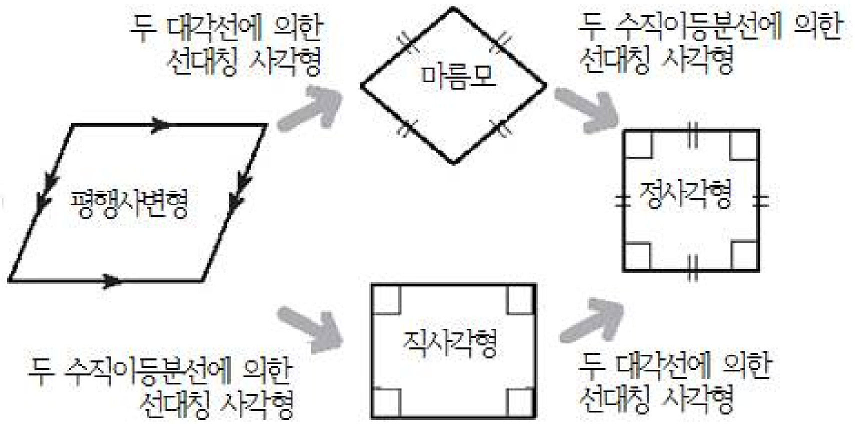
둘째, 사각형의 대칭성으로부터 사각형의 성질을 연역하였다. 이는 대칭변환의 정의, '도형을 대칭이게 하는 변환'으로부터 전개한 것이다. 초등학교에서 대응의 관점에서 대칭도형의 성질을 다루었다면, 본 수업에서는 이를 사각형의 성질로서 정리하였다. 대응변의 길이, 대응각의 크기 등의 연산적 대응 "과정(process)"에서 대변의 길이, 대각의 크기 등 "대상(object)"으로 정리하며, 대칭성에 대한 풍부한 학습을 이어갈 수 있다. 또한, 각 사각형의 모든 성질을 대칭성이라는 일관된 방법으로부터 연역할 수 있다.

셋째, 사각형의 성질을 비교하여 이들의 관계를 파악한다. 예를 들어, 대칭성으로부터 연역한 마름모의 성질 중에 평행사변형의 성질이 포함되어있음을 확인할 수 있다. 이를 통해 '마름모는 평행사변형의 성질을 모

두 만족한다.'를 이해할 수 있다. 기존의 학습에서는 평행사변형의 조건, 사각형의 정의를 통해 '마름모는 평행사변형이다.'를 선행 이해하여야 했다. 반면 대칭으로 성질을 모두 연역한다면 학습목표에 보다 쉽게 접근할 수 있다.

넷째, 본 실험에서는 이어서 '마름모는 평행사변형에 포함된다.'를 대칭성의 포함관계로부터 추론할 수 있는지를 확인하고자 하였다. 그러나 실험 참여 학생들의 반응을 앞서 살펴본 결과, 조건과 포함관계 사이의 이해 부족으로 답변이 여러 갈래로 나뉘었다. 이에 본 연구자는 실험에서 다루었던 "포함"이라는 단어를 삭제하고 다음과 같은 학습을 제안한다.

평행사변형 중에서 두 대각선에 의한 선대칭 사각형은 마름모이다. 평행사변형 중에서 두 인접하는 변의 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형은 직사각형이다. 직사각형 중에서 두 대각선에 의한 선대칭 사각형은 정사각형이다. 마름모 중에서 두 인접하는 변의 수직이등분선에 의한 선대칭 사각형은 정사각형이다. 이를 정리하면 [그림 Ⅳ.6]과 같다.



[그림 Ⅳ.6] 대칭성을 이용한 여러 가지 사각형의 관계

본 수업실험에서의 제한점을 요약하면 다음과 같다. 첫째, 주어진 시간의 한계로 인해 여러 가지 사각형의 관계를 수업내용으로 포함시키지 못하고 사후 설문 문항으로 대체하였다. 또한 대칭성으로부터 사각형의 성질을 연역할 때, 교과서에서 다루는 성질만을 다루었다. 더욱 깊이 있는 학습을 위해서는 학생이 교과서에 나오는 사각형의 성질 외에도 다양한 성질들을 탐색할 수 있도록 가능성을 열어주는 것이 바람직할 것으로 보인다.

둘째, 사각형의 모든 대칭변환을 수업내용으로 다루지 않았다. 항등변환은 모든 사각형에서 언급하지 않았으며, 정사각형의 경우 항등변환 외에도 90°, 270° 회전변환을 언급하지 않았다. 이는 초등학교에서 배운 선대칭도형(반사변환에 대해 대칭인 도형), 점대칭도형(180° 회전변환에 대해 대칭인 도형)만으로 사각형 학습 내용을 구성하기 위해서였다. 항등변환과 180° 외의 회전변환 등 다양한 대칭변환을 지도한다면 도형의 대칭에 대해 보다 더 심화된 탐구학습을 전개할 수 있을 것이다.

셋째, 사각형의 대칭성과 사각형의 정의의 동치관계를 학습내용에 포함시킬지 고려해보아야 한다. 실제로 기존의 교과서 학습방법과 대칭성을 이용한 학습방법을 비교하는 설문에 대해, 한 학생이 '대칭성으로는 사각형의 모든 성질을 알 수 없을 것 같다.'라고 답하였다. 본 수업에서는 임의로 직접 만든 사각형의 대칭성을 탐구하는 것으로 '모든 평행사변형은 점대칭이다.'를 일반화하였으나, '점대칭 사각형이면 평행사변형이다.'라는 그 역에 대해서는 설명하지 않았다. 이 때문에 비롯될 의문에 대비하여 사각형의 대칭성이 정의를 대체할 수 있다는 설명이 추가되어야 할 것으로 판단된다.

Ⅳ. 요약 및 결론

현행 학교기하는 유클리드식의 추론 방법을 바탕으로 준-공리 체계를 따르고 있다. 이 학습 방법의 형식적이고 엄밀한 측면은 역사적으로 Klein의 변환기하가 탄생한 배경이 되었다. 변환기하학은 주어진 변환군의 불변성을 탐구하는 것으로 이 관점에 따라 기존 여러 기하학들이 위계적으로 분류된다. 그중 합동변환군의 불변성을 탐구하는 것이 유클리드기하이며 현행 학교기하의 전반적인 내용이라고 볼 수 있다.

우리나라 기하교육과정에서 중학교는 평면논증기하의 첫 등장시점이다. 이에 대해 학생들의 학습 상 어려움이 꾸준히 지적되어, 2009 개정 교육과정부터 증명활동은 정당화활동으로 확대 대체되었다. 그럼에도 과연 중학교과정이 엄밀한 논증기하학습을 하기에 적절한 시기인가에 대한 의문은 풀리지 않았고, 보다 더 직관적이고 구체적인 활동에 의한 기하 학습전개의 필요성이 계속하여 제기되고 있다.

한편, 다른 나라의 수학 학습 내용과 우리나라와의 공통점 및 차이점을 파악하는 것은 의미 있는 교육적 시사점을 도출할 수 있는 방법 중 하나라 할 수 있다. 특히, 도형에 대한 정의는 다양하기 때문에 어떠한 기하학적 관점을 강조하느냐에 따라 학습의 전개가 달라진다. Usiskin et al(2008)는 미국의 각 교과서에서 다양하게 정의하는 사각형의 종류를 나열, 분석한 바 있다. Miyakawa(2017)는 일본과 프랑스의 기하 교과서를 분석하며, 일본의 유클리드기하식 사각형 정의와 프랑스의 변환 기하학적 사각형 정의에 따른 학습 전개 방식을 비교하였다. 특히, Zazkis와 Leikin(2008)은 도형의 다양한 정의들 중에서 교사와 교과서로부터 선택

된 정의가 과연 학습자에게 교육적으로 적합한지에 대한 고려가 필요하다고 지적하였다.

이에 본 연구는 변환 기하학적 관점에서 현행 기하학습을 고찰하고 새롭게 학습내용을 구성하여 제시하였다. 먼저 미국과 우리나라의 교과서 내용 및 교육과정을 특히 변환 기하학적 관점에서 비교하였다. 두 나라에서 변환기하 학습에 두는 비중의 차이는 학습 내용과 전개방식의 차이로 이어졌다. 이어서 중학교 기하교육과정에 변환 기하학적 관점을 활용할 수 있는 예로 사각형의 성질 학습지도 방안을 제시하였다. 대칭변환을 통해 여러 가지 사각형의 성질 및 관계를 학습하는 과정에 대해 자세히 살펴보며 그 학습 가능성을 확인할 수 있었다.

연구문제 첫 번째는 “변환기하의 비중에 따라 기하학습의 내용 및 전개방식은 어떻게 다른가?”이다.

이 물음에 답하기 위해 우리나라와 상대적으로 변환기하 학습을 강조하는 미국의 교과서 및 교육과정 자료를 비교분석하였다. 우리나라 교육과정에는 나타나지 않는 ‘변환’을 미국에서는 강조하고 있었으며 더 심화된 내용을 다루고 있었다. 자세한 비교 내용은 다음과 같다.

첫째, 미국 교육과정에서는 변환과 대칭으로 수학적 상황을 분석하기를 목표로 제시하는 반면, 우리나라 교육과정에서는 변환기하 관련하여 학습목표를 명확하게 제시하지 않는다. 둘째, 우리나라는 변환기하 학습 시기가 초등학교와 고등학교로 분리되어 있고, 미국은 전 학년에서 권장되고 있다. 셋째, 미국 교육과정에서는 합동변환 정의를 다루고 그 하위 종류로 반사, 평행이동, 회전 등을 설명하며 이 변환들의 공통적 성질을 강조하고 있다. 반면, 우리나라 교육과정은 합동변환이라는 단어가 등장하지 않으며 합동은 유클리드기하식의 접근으로만 다루어진다. 넷째, 학습순서를 살펴보면, 미국은 합동변환을 정의한 후 대칭도형을 다루기 때

문에 대칭도형의 정의에서 변환의 연산적 과정이 강조된다. 반면, 한국교육과정에서는 초등학교에서 대칭도형을 먼저 학습하는데, 앞서 배운 도형의 합동과 관련하여 다루지 않아 변환의 함수적 측면이 상대적으로 강조되지 않는다. 다섯째, 미국교육과정에서는 변환을 나타내는 다양한 표현 방법을 익히는 한편, 우리나라는 좌표평면 위에서의 점과 도형의 이동만을 학습하고 있다.

연구문제 두 번째는 “대칭성을 이용한 사각형 학습지도의 결과 및 시사점은 무엇인가?”이다.

닮음변환군에서 불변량 중 삼각비가 중요한 역할을 하듯이, 합동변환군에서는 변환에 대해 선분의 길이와 각의 크기가 불변이라는 것이 가장 중요한 내용이다. 도형의 대칭변환을 통해 도형의 성질을 학습하면 학습과정에서 조작활동이 자연스러워지고 직관적 학습이 가능하게 된다. 이에 본 연구는 중학교 기하교육과정에서 사각형의 성질을 변환 기하학적 관점에서 교수실험 하였다. 대칭성을 이용한 사각형의 성질 탐구학습 과정을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 사각형의 대칭성을 발견하는 과정은 한 도형의 대칭변환을 모두 찾아내는 것으로 기하학습을 보다 동적이게 하고 스스로 탐구하는 기회를 제공한다. 둘째, 사각형의 대칭으로부터 사각형의 성질을 연역하는 것은 연산적 대응 “과정”에서 도형의 “대상”으로 나아가며 대칭에 대한 풍부한 학습이 된다. 셋째, 각 사각형의 성질들을 비교하며 여러 가지 사각형의 성질의 관계에 보다 쉽게 접근할 수 있다. 넷째, 여러 가지 사각형의 관계를 대칭성이라는 통일된 관점으로 학습할 수 있다.

한편, 위 수업실험은 기존의 학습내용에서 평행사변형의 조건을 다룰 필요가 없어진다는 장점이 있으나, 사각형과 사다리꼴을 대칭성으로 구분하지 못한다는 단점이 따른다. 따라서 위 내용은 기존의 학습방식과

절충하여 활용될 필요가 있다.

대칭은 역사적으로 예술, 과학 등 여러 분야에서 다양한 현상을 설명하는 원리이자 탐구수단이 되어왔다. 수학에서도 대칭의 아이디어는 기하뿐만 아니라 전체 수학 영역에서 핵심적 역할을 하고 있다. 그렇기 때문에 대칭과 변환은 학습 측면에서 수학적 상황을 분석하고, 수학적 개념을 이해하는 데에 있어 가치 있는 도구 역할을 할 수 있다. 변환의 불변성에 대한 탐구학습은 수학적 대상을 새로운 관점에서 바라볼 수 있게 할 것이고, 여러 수학 영역을 연결 짓는 도구가 되어 통합적 안목을 기를 수 있게 할 것이다. 이에 대해 보다 깊은 후속연구가 필요하다.

참 고 문 헌

교육과학기술부, 전라남도교육청(2012). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 성취기준 및 성취수준 개발 연구.

교육부(2014). 수학 <3-1> 초등학교 교사용 지도서. 서울: 천재교육.

교육부(2014). 수학 <5-2> 초등학교 교사용 지도서. 서울: 천재교육.

교육부, 대전광역시교육청(2016). 2015 개정 교육과정 교수·학습 자료:수학.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤(2011). **예비교사와 현직 교사를 위한 수학교육과정과 교재연구**. 경문사.

남진영, 박선용(2002). '대칭성' 관점에서 본 '문제해결' 및 '군' 개념지도. **수학교육학연구**, 12(4). 한국수학교육학회. 509-521.

도종훈(2006). 중학교 기하 영역에서의 수학적 창의성 교육 연구. 박사학위논문. 서울대학교.

류희찬 외(2012). **중학교 수학 2 교과서**. 서울: (주)천재교과서.

박정선(2005). 함수와 역함수 개념 이해의 수학교육적 고찰. 석사학위논문. 서울대학교.

박해민, 이종희(2017). 추측과 정당화 관점에서 중학교 2학년 수학교과서 분석: 기하영역을 중심으로. **교과교육학연구** 20(5). 371-381.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교 출판부.

유윤재(2013). **중등수학 교재연구**. 경문사.

이규희, 최영기(2016). "평행사변형은 사다리꼴이다."에서 '이다'에 대한 고찰. **학교수학** 18(3). 대한수학교육학회.

이준열 외(2010). **고등학교 수학Ⅰ 교과서**. 서울: (주)천재교과서.

정혜윤, 이경화(2016). 우리나라와 미국 수학 교과서의 과제 비교 -평행

사변형 조건을 중심으로. **학교수학** 18(4). 대한수학교육학회.

조미혜(2014). 중학교 수학 교과서의 기하영역 분석 -추론과 정당화를 중심으로-. 석사학위논문. 서울대학교.

최민아(2009). 고등학교 학생들의 도형의 대칭이동에 대한 이해 수준에 관한 연구. 석사학위논문. 한국교원대학교.

한길준, 신봉숙(2007). 초등기하에서 도형의 대칭에 관한 연구. **한국수학사학회지**. 21(2). 73-88.

Carter, A., Cuevas, J., Day, R., Malloy, C., & Cummins, J. (2012). *Geometry.* Glencoe McGraw-Hill.

Clausen-May, T., Jones, K., McLean, A., & Rowlands, S. (2000). Perspectives on the design of the geometry curriculum. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics,* 20(1&2), 34-41.

Dreyfus T., & Eisenberg, T. (1998). On Symmetry in school mathematics. Symmetry: *Culture and Science.* 9(2-4), 189-197.

Henle, M. (2001). *Modern Geometries: Non-Euclidean, Projective, and Discrete.* Prentice Hall.

Leung, I. K. C. (2008). Teaching and learning of inclusive and transitive properties among quadrilaterals by deductive reasoning with the aid of SmartBoard. *ZDM Mathematics Education,* 40, 1007-1021.

Miyakawa, T. (2017). Comparative analysis on the nature of proof to be taught in geometry: the cases of French and Japanese lower secondary schools. *Educational Studies in Mathematics,* 94, 37-54.

Monaghan, F. (2001). What difference does it make? Children's views of the difference between some quadrilaterals. *Educational Studies in Mathematics,* 42, 179-196.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.*

Usiskin, Z., Griifin, J., Witonsky, D., & Willmore, E. (2008). *The classification of quadrilaterals: A study of definition.* IAP.

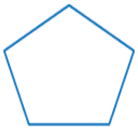
Villiers, M. D. (1994). The Role and Function of Hierarchical Classification of Quadrilaterals. *For the learning of mathematics,* 14(1), 11-18.

Weyl, H. (1952). *Symmetry.* Princeton University Press.

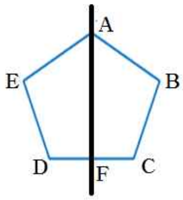
Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics,* 69, 131-148.

<부록> 대칭성을 이용한 사각형의 성질 탐구 활동지

1. 다음 도형은 선대칭일까? 만약 선대칭이라면 모든 대칭축을 그려보고, 그 대칭축의 수를 써보자.

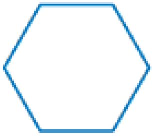


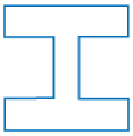
다음 도형에서 주어진 대칭축 $\overline{AF}$에 대하여 대응 관계를 생각해보고 빈 칸을 채워보자.



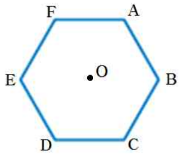
대칭 관계	선대칭의 성질
$\overline{AB}=$ _____	①
$\angle C=$ ____	②
$\overline{AF}$ ___ $\overline{BE}$ $\overline{AF}$ ___ $\overline{CD}$	③

2. 다음 도형은 점대칭일까? 만약 점대칭이라면, 대칭의 중심을 찾아보자.



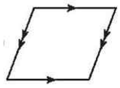
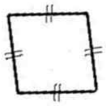
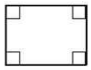
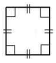


다음 도형에서 대칭의 중심 O에 대하여 대응 관계를 생각해보고 빈 칸을 채워보자.



대칭 관계	점대칭의 성질
$\overline{AB}=$ _____	(1)
$\angle C=$ ___	(2)
$\overline{AO}$ ___ $\overline{DO}$ $\overline{BO}$ ___ $\overline{EO}$	(3)

3. 각자 만든 평행사변형, 마름모, 직사각형, 정사각형을 보고 다음 표의 빈 칸을 채워보자.

	점대칭(O, X)	선대칭(O, X)	대칭축의 개수	대칭의 중심, 대칭축 그리기
평행사변형				
마름모				
직사각형				
정사각형				

4. 위의 표에서 발견한 각 사각형들의 대칭성을 정리하고 물음에 답해보자.

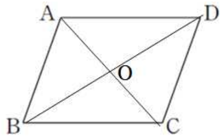
	대칭성
평행사변형	
마름모	
직사각형	
정사각형	

- 위 사각형들 중에서 점대칭 사각형은 무엇인가요?

- 대각선을 대칭축으로 갖는 선대칭 사각형은 무엇인가요? 수직이등분선을 대칭축으로 갖는 선대칭 사각형은 무엇인가요?

- 평행사변형과 직사각형의 대칭성을 비교해봅시다. 평행사변형과 직사각형은 어떤 공통점과 차이점이 있을까요?

5. 자기가 만든 평행사변형을 이용하여 평행사변형의 대칭성으로 알 수 있는 성질들을 찾아보자.

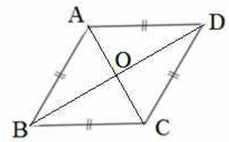


▸ **평행사변형의 대칭성 :** 평행사변형은 점대칭도형이다.

▸ **점대칭 성질 :**

대칭 관계	대칭 성질(번호)	평행사변형의 성질
$\overline{AD}$ = _____ $\overline{AB}$ = _____		
∠A = _____ ∠B = _____		
$\overline{AO}$ = _____ $\overline{BO}$ = _____		

6. 자기가 만든 마름모를 이용하여 마름모의 대칭성으로 알 수 있는 성질들을 찾아보자.



▸ **마름모의 대칭성 :**

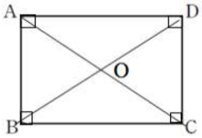
▸ **점대칭 성질 :**

대칭 관계	대칭 성질(번호)	마름모의 성질
∠A = _____ ∠B = _____		
$\overline{AO}$ = _____ $\overline{BO}$ = _____		

▸ **선대칭 성질 :**

대칭 관계	대칭 성질(번호)	마름모의 성질
$\overline{AC}$ ___ $\overline{BD}$		

7. 자기가 만든 직사각형을 이용하여 <u>직사각형의 대칭성으로 알 수 있는 성질들</u>을 찾아보자.



▸ <u>**직사각형의 대칭성 :**</u>

▸ <u>**점대칭 성질 :**</u>

대칭 관계	대칭 성질(번호)	직사각형의 성질
$\overline{AD}$ = _____ $\overline{AB}$ = _____		
$\overline{AO}$ = _____ $\overline{BO}$ = _____		

▸ <u>**선대칭 성질 :**</u>

대칭 관계	대칭 성질(번호)	직사각형의 성질
$\overline{AO}$= _____ =_____=_____		

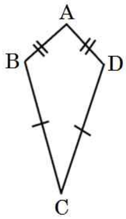
8. 위에서 탐구한 내용을 바탕으로 아래 질문에 답해봅시다.

[정리하기] **마름모의 성질과 평행사변형의 성질을 비교해봅시다. 마름모는 평행사변형의 성질을 모두 만족하나요? 왜 그렇다고 생각하나요?**

[정리하기] **직사각형은 평행사변형의 성질을 모두 만족하나요? 왜 그렇다고 생각하나요?**

[추측하기] **그렇다면 정사각형은 어떤 성질을 만족할까요? 그렇게 생각한 이유는 무엇인가요?**

1. 다음 사각형ABCD의 성질을 최대한 추측해보고 그렇게 추측한 이유를 적어보자.

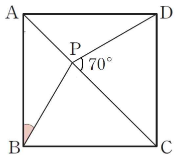


(변의 길이, 각의 크기, 대각선의 특징 등

추측① : ______ 이유 : ______ ______
추측② : ______ 이유 : ______ ______
추측③ : ______ 이유 : ______ ______

2. 다음 문제를 자신이 생각하는 가장 쉬운 방법으로 풀이해보자. 답과 함께 풀이 과정을 자세히 쓰세요.

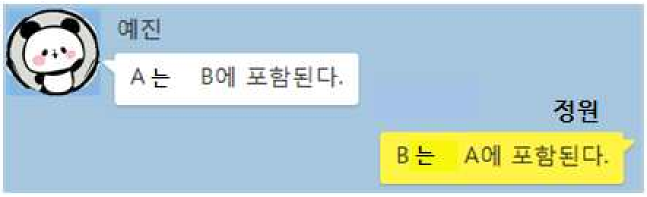
오른쪽 정사각형 ABCD에서 대각선 AC 위에 한 점 P가 있다. ∠DPC = 70° 일 때, ∠ABP 의 크기를 구하시오.



3. 덕수중학교에서 다음 ①, ②, ③를 만족하는 그룹을 **<u>그룹A</u>**라 하고 ①, ②, ③ 뿐만 아니라 ④까지 만족하는 그룹을 **<u>그룹B</u>**라 하자.

① 2반 학생이다. 	② 안경을 착용한다. 	③ 여학생이다. 	④ 이번 추석 때 축구경기를 봤다. 

다음 채팅방에 초대되었다고 하자. 둘 중 누가 하는 말이 옳은가요? 그 이유는 어떻게 설명할 수 있을까요?



옳게 말한 사람 :
그 이유 :

4. 다음 친구는 '마름모는 평행사변형에 포함된다.'를 이해하는 데에 어려워하고 있습니다. **앞서 탐구한 <u>마름모와 평행사변형의 대칭성</u>, 그리고 <u>3번을</u> 이용해서** 친구에게 이를 설명해보세요.

마름모가 평행사변형에 포함된다고?
흠...

5. 오늘 했던 사각형의 대칭성으로 여러 가지 사각형의 **성질**을 탐구하는 활동에 대해 다음 물음에 답하세요.

평행사변형 정의 : 두 쌍의 대변이 평행한 사각형

← **점대칭 사각형이다.**

성질 : 두 쌍의 대각의 크기가 같다.
두 쌍의 대변의 길이가 같다.
두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.

마름모, 직사각형은 점대칭 사각형이므로 평행사변형의 성질을 모두 만족한다.

- 대칭성으로 탐구하는 방법의 좋은 점과 어려운 점은 무엇일까요? 그 이유는 무엇인가요?

- 오늘 했던 활동에 대한 느낀 점을 써주세요.

ABSTRACT

A study on the Teaching and Learning of Quadrilaterals by Using Symmetry

Ha, Yejin
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

When identifying a proposition in geometry, Euclid's deductive methods are come to mind first. This is one of the reasons students have difficulty with the geometry. Although the geometry can be used as an active material compared to other mathematical fields, the curriculum in Korea is composed of mathematical symbols and formal proofs. There is also a lack of explanations of where the proposition came from and opportunities for students to study themselves. This study attempted a new approach to the geometric curriculum from the perspective of transformation geometry.

Transformation geometry is an essential learning area in US curriculum. It deals mainly with congruence transformations and symmetric transformations, emphasizing the preservation of shape properties under a particular transformation and aims to analyze the mathematical situation. On the other hand, Korean curriculum adopts Euclidean geometry method and regards intuitive geometry as an auxiliary means.

This study suggests an example of the teaching and learning of transformation geometry in middle school curriculum. Students were able to perform manipulations such as flips and turns on quadrilaterals, learning about transformations and symmetry, and naturally deducing the properties of quadrilaterals. Symmetry also leads to learn the relationship of quadrilaterals from a unified viewpoint.

Transformation geometry emphasizes the intuitive and concrete aspect of learning, and its application value is high as a method of directly deducing shape properties through activities. Transformations and symmetry highlight the merits of intuitive geometry and provide a new perspective on the existing geometric curriculum.

Key Words : symmetry, symmetric transformation, transformation geometry, properties of quadrilaterals

Student Number : 2016-21572